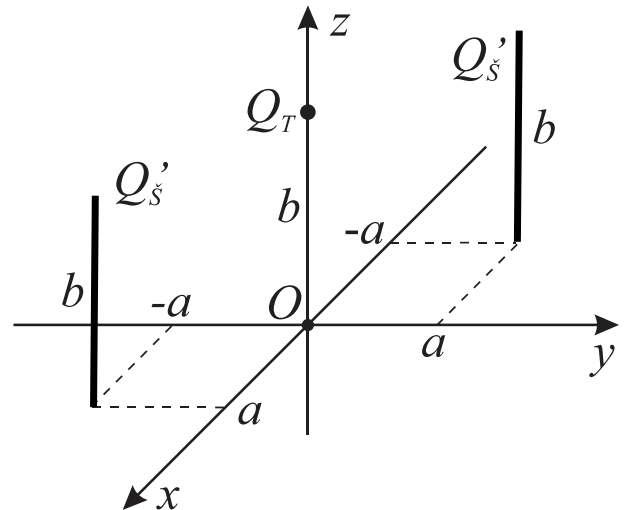


ZADACI

Zadatak 1. Dva tanka štapa od izolacionog materijala, naelektrisana su ravnomerno istim podužnim naelektrisanjem Q_s' , kao što je prikazano na slici 1. Štapovi su dužine b i postavljeni su paralelno sa z osom. Tačkasto naelektrisanje, $Q_T > 0$, se nalazi na z osi, na udaljenosti b od koordinatnog početka. Sredina je vazduh.

- Izvesti, u opštim brojevima, izraz za vektor jačine električnog polja koji u tački O stvaraju sve naelektrisane strukture.
- Izvesti, u opštim brojevima, izraz za vektor električne sile kojom bi strukture delovale na probno naelektrisanje Q_P , ukoliko bi se ono postavilo u tačku O .
- Odrediti količinu naelektrisanja Q_T , tako da intenzitet sile na probno naelektrisanje Q_P bude jednak nuli.

Brojni podaci su: $Q_s' = 1 \text{ nC/m}$, $Q_P = 1 \text{ pC}$,
 $a = 1 \text{ cm}$, $b = a\sqrt{2}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.



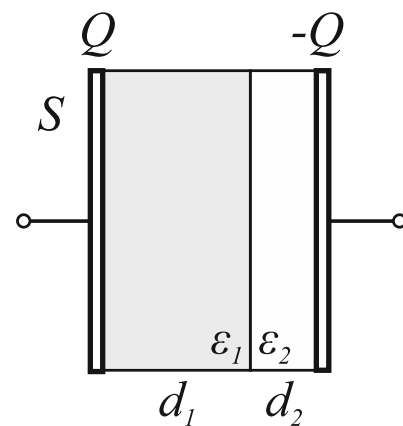
Slika 1.

Zadatak 2. Na slici 2 je prikazan pločasti kondenzator ispunjen sa dva sloja dielektrika, relativnih permitivnosti $\epsilon_{r1} = 4$ i $\epsilon_{r2} = 8$, debljina d_1 i d_2 . Površina obloga kondenzatora je S , dok su elektrode kondenzatora naelektrisane naelektrisanjima Q i $-Q$.

- Koji granični uslov važi za datu konfiguraciju dielektrika u kondenzatoru?
- Odrediti, u opštim brojevima, izraz za kapacitivnost kondenzatora.
- Izračunati brojnu vrednost kapacitivnosti.
- Proveriti da li će doći do proboja u kondenzatoru, ukoliko se on priključi na izvor napona $U = 90 \text{ kV}$.
- (bonus 5p) Odrediti energije sadržane u pojedinačnim slojevima kondenzatora, pri maksimalnom naponu, neposredno pre proboja.

Ostali brojni podaci su:

$E_{\check{c}1} = 45 \text{ kV/cm}$, $E_{\check{c}2} = 65 \text{ kV/cm}$,
 $d_1 = 2 \text{ cm}$, $d_2 = 1 \text{ cm}$, $S = 50 \text{ cm}^2$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.



Slika 2.

PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je tačno uraditi više od 50% svakog od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje jedan sat i trideset minuta.

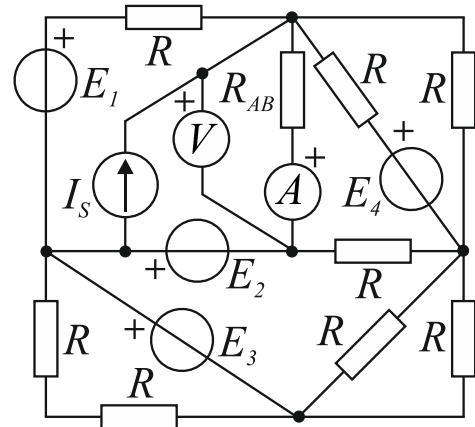
ZADACI

Zadatak 1. U kolu vremenski konstantnih struja sa slike 2 otpornost otpornika R_{AB} je takva da se na njemu razvija maksimalno moguća snaga. Primenom Thevenenove teoreme izračunati:

- vrednost otpornosti otpornika R_{AB} i snagu koja se na njemu razvija, kao i
- pokazivanja idealnih mernih instrumenata.

Brojni podaci su:

$$R = 110 \, \Omega, E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 12 \, \text{V}, I_S = 50 \, \text{mA}.$$



Slika 1.

Zadatak 2. U kolu vremenski konstantnih struja sa slike 2, odrediti pokazivanja idealnih mernih instrumenata kada rade svi generatori osim strujnog generatora I_S .

(bonus 5p) Izračunati pokazivanje idealnog ampermetra u kolu kada rade svi generatori.

Napomena: Prilikom rešavanja, ne rešavati novo kolo, nego iskoristiti prethodno izračunato pokazivanje ampermetra uz primenu teoreme superpozicije.

Brojni podaci su:

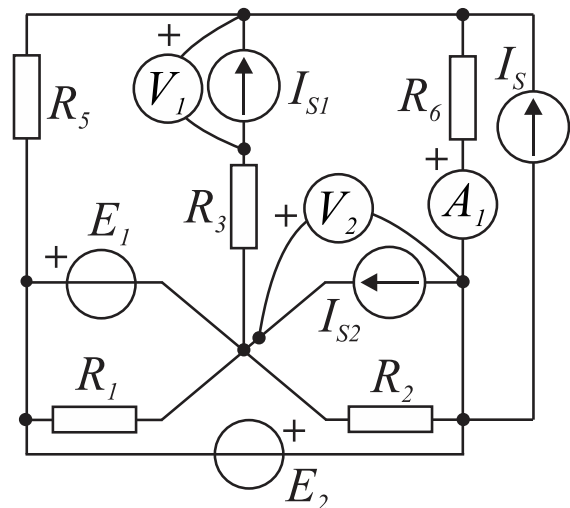
$$R_1 = 20 \, \Omega, R_2 = 50 \, \Omega, R_3 = 10 \, \Omega,$$

$$R_5 = 5 \, \Omega, R_6 = 15 \, \Omega,$$

$$E_1 = 5 \, \text{V}, E_2 = 20 \, \text{V},$$

$$I_{S1} = 1,33 \, \text{A}, I_{S2} = 0,5 \, \text{A},$$

$$I_S = 1 \, \text{A}$$



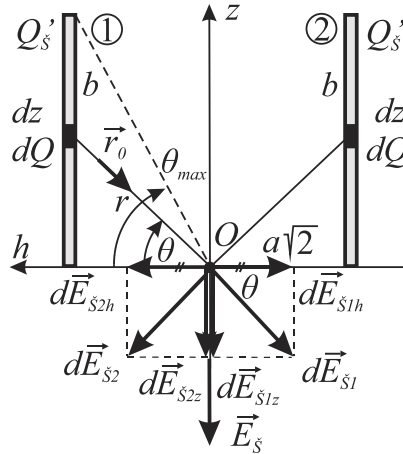
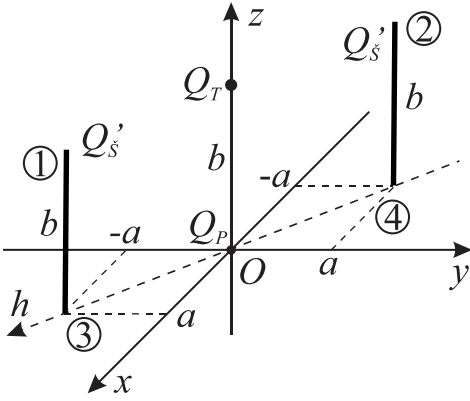
Slika 2.

PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je tačno uraditi više od 50% svakog od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje jedan sat i trideset minuta.

K1 Z1

a)



Zbog simetrije je: $d\vec{E}_{s1h} + d\vec{E}_{s2h} = 0 \Rightarrow E_{sh} = 0$

$$dE_{sz} = 2 dE_{s1z} = 2 dE_{s1} \sin \theta = 2 \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = 2 \frac{Q_s' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = 2 \frac{Q_s' \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = 2 \frac{Q_s' \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \theta$$

$$dE_{sz} = 2 \frac{Q_s' \frac{d\theta}{\cos \theta}}{4\pi\epsilon_0 \frac{a\sqrt{2}}{\cos \theta}} \sin \theta = 2 \frac{Q_s'}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \sin \theta d\theta$$

$$E_s = \int_{\text{po s\textsubscript{t}apu}} dE_{sz} = 2 \frac{Q_s'}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \int_0^{\theta_{\max}} \sin \theta d\theta = 2 \frac{Q_s'}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} (\cos 0 - \cos \theta_{\max}) = \frac{Q_s'}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{b^2 + (a\sqrt{2})^2}} \right)$$

$$E_s = \frac{Q_s'}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2}} \right) \quad (b = a\sqrt{2})$$

$$\vec{E}_s = \frac{Q_s'}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-\vec{i}_z)$$

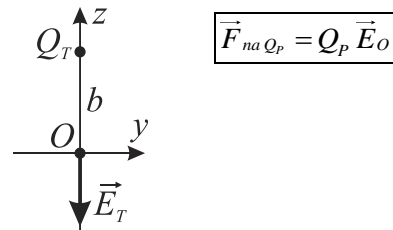
b)

$$E_T = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 b^2} \quad \vec{E}_T = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot (-\vec{i}_z)$$

$$\vec{E}_O = \vec{E}_s + \vec{E}_T = \frac{Q_s'}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-\vec{i}_z) + \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot (-\vec{i}_z)$$

$$\vec{E}_O = \left(\frac{Q_s'}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 b^2} \right) \cdot (-\vec{i}_z)$$

c)



c)

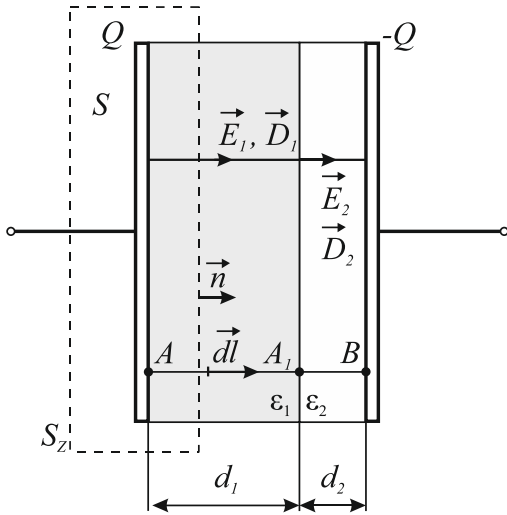
$$\vec{F}_{na Q_P} = 0 \Rightarrow \vec{E}_O = 0 \Rightarrow \vec{E}_s = -\vec{E}_T$$

$$\frac{Q_s'}{2\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-\vec{i}_z) = -\frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot (-\vec{i}_z)$$

$$Q_T = -Q_s' \frac{2b^2}{a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -Q_s' \frac{4a^2}{a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -8,28 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

$$Q_T = -8,28 \text{ pC}$$

K1 Z2



a)

Granični uslov:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad D_1 = D_2 = D$$

$$E_{t1} = E_{t2} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{slobodno\ u\ S}$$

$$\int_S D ds = Q$$

$$DS = Q$$

$$D = \frac{Q}{S}$$

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_1 S}$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_2 S}$$

b)

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^{A_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{A_1}^B \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} = \frac{1}{\frac{d_1}{S\epsilon_1} + \frac{d_2}{S\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = 0,8 \cdot \epsilon_0$$

c)

$$C = 0,8 \cdot \epsilon_0 = 7,08 \text{ pF}$$

d)

$$\left. \begin{aligned} E_{1\max} = \frac{Q_{1\max}}{\epsilon_1 S} \leq E_{C1} &\Rightarrow Q_{1\max} = E_{C1} \epsilon_1 S = 0,79 \mu\text{C} \\ E_{2\max} = \frac{Q_{2\max}}{\epsilon_2 S} \leq E_{C2} &\Rightarrow Q_{2\max} = E_{C2} \epsilon_2 S = 2,3 \mu\text{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{\max} = \min\{Q_{1\max}, Q_{2\max}\} = Q_{1\max}$$

$$U_{\max} = \frac{Q_{\max}}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \quad U_{\max} = 112,5 \text{ kV}$$

$$U < U_{\max} \Rightarrow \text{Neće doći do proboja.}$$

e)

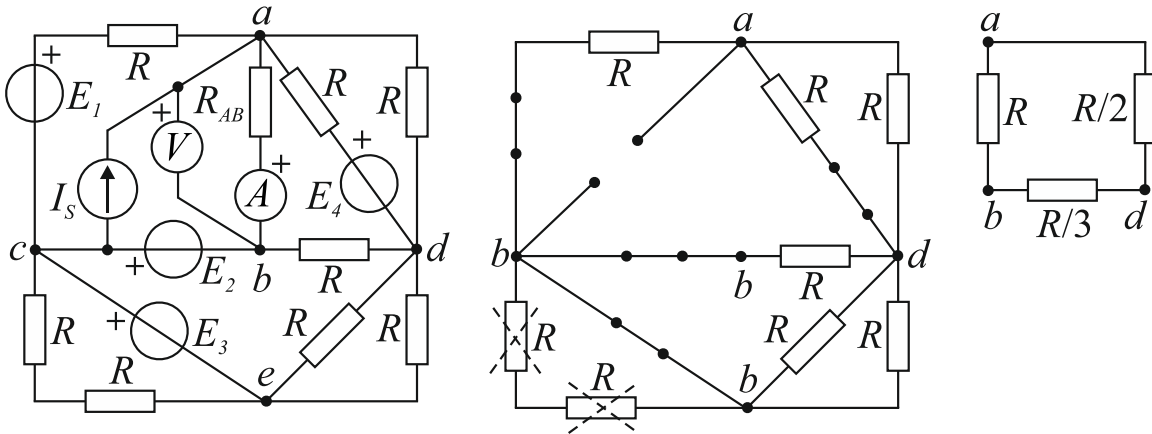
$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \frac{Q_{\max}^2}{C_1} = \frac{Q_{\max}^2}{2 \epsilon_1 S} = \frac{Q_{\max}^2 d_1}{2 \epsilon_1 S} \quad W_{e1} = 35,8 \text{ mJ}$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2} \frac{Q_{\max}^2}{C_2} = \frac{Q_{\max}^2}{2 \epsilon_2 S} = \frac{Q_{\max}^2 d_2}{2 \epsilon_2 S} \quad W_{e2} = 9 \text{ mJ}$$

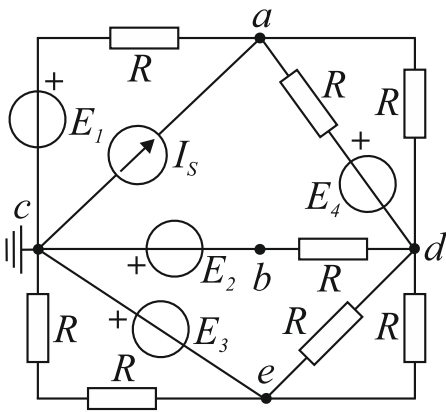
K2 Z1

a)



$$R_T = R_{ab} = R \parallel \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{3} \right) = R \parallel \frac{5R}{6} = \frac{5R}{11} = \frac{5 \cdot 110}{11} = 50 \Omega$$

$$R_{AB} = R_T = 50 \Omega$$



$$V_c = 0V, \quad V_e = -E_3 = -12V \quad (V_b = -E_2 = -12V)$$

$$V_a \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - V_d \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = I_s + \frac{E_1}{R} + \frac{E_4}{R} \quad / \cdot R$$

$$V_d \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - V_a \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - V_e \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{E_2}{R} - \frac{E_4}{R} \quad / \cdot R$$

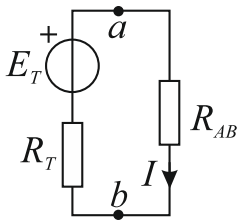
$$3V_a - 2V_d = RI_s + E_1 + E_4$$

$$5V_d - 2V_a - 2V_e = -E_2 - E_4$$

$$\left. \begin{aligned} 3V_a - 2V_d &= 29,5 \\ -2V_a + 5V_d &= -48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_a = 4,68V \quad V_d = -7,73V$$

$$E_T = U_{ab} = V_a - V_b = 4,68 - (-12)$$

$$E_T = 16,68V$$



$$I = \frac{E_T}{R_T + R_{AB}} = \frac{16,68}{50 + 50} = 0,17 A$$

$$P_{R_{AB}}^{\max} = R_{AB} I^2 = 50 \cdot 0,17^2$$

$$P_{R_{AB}}^{\max} = 1,45 W$$

b)

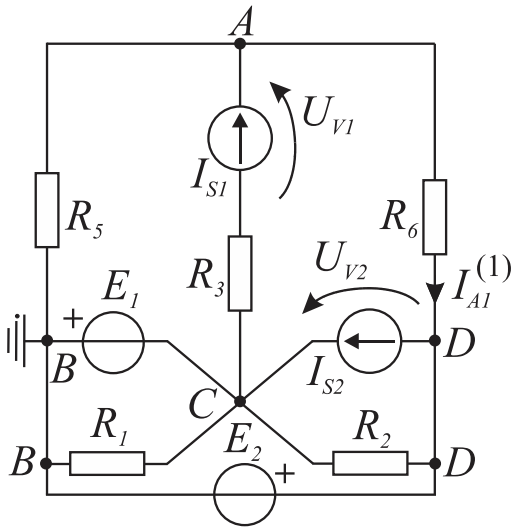
$$I_A = I = 0,17 A$$

$$U_V = U_{ab} = R_{AB} I = 50 \cdot 0,17$$

$$U_V = 8,5 V$$

K2 Z2

Kolo kada rade svi generatori osim strujnog generatora I_S :



$$\begin{aligned}
 V_B &= 0 \text{ V} \\
 V_C &= -E_1 = -5 \text{ V} \\
 V_D &= E_2 = 20 \text{ V} \\
 V_A \left(\frac{1}{R_3 + \infty} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - V_C \left(\frac{1}{R_3 + \infty} \right) - V_D \left(\frac{1}{R_6} \right) &= I_{S1} \\
 \hline
 V_A \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{15} \right) - 20 \cdot \left(\frac{1}{15} \right) &= 1,33 \quad / \cdot 15 \\
 4V_A &= 40 \\
 \hline
 V_A &= 10 \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$U_{V1} = U_{AC} + R_3 I_{S1} = V_A - V_C + R_3 I_{S1} = 10 - (-5) + 10 \cdot 1,33 = 28,33 \text{ V}$$

$$U_{V2} = U_{CD} = V_C - V_D = -5 - 20 = -25 \text{ V}$$

$$\boxed{U_{V1} = 28,33 \text{ V}}$$

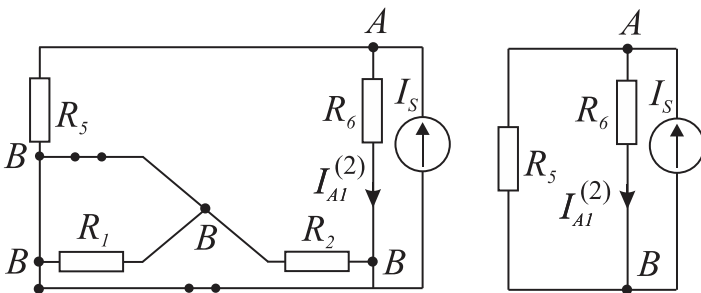
$$\boxed{U_{V2} = -25 \text{ V}}$$

$$I_{AI}^{(1)} = \frac{V_A - V_D}{R_6} = \frac{10 - 20}{15} = -0,67 \text{ A}$$

$$\boxed{I_{AI}^{(1)} = -0,67 \text{ A}}$$

(bonus – 5 poena)

Kolo kada radi samo strujni generator I_S :



$$I_{AI}^{(2)} = \frac{R_5}{R_5 + R_6} I_S = \frac{5}{5 + 15} \cdot 1 = 0,25 \text{ A}$$

Primenom teoreme superpozicije dobijamo pokazivanje ampermetra kada rade svi generatori:

$$I_{AI} = I_{AI}^{(1)} + I_{AI}^{(2)} = -0,67 + 0,25 = -0,42 \text{ A}$$

$$\boxed{I_{AI} = -0,42 \text{ A}}$$