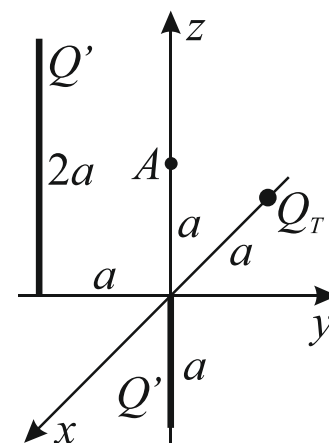


ZADACI

Zadatak 1. Dva tanka štapa i jedno tačkasto naelektrisanje postavljeni su u xyz Dekartovom koordinatnom sistemu, kao što je prikazano na slici 1. Štapovi su naelektrisani ravnomerno istim podužnim gustinama naelektrisanja Q' . Prvi štapa, dužine $2a$, je postavljen u $y-z$ ravni, paralelno sa z osom, na rastojanju a od centra sistema. Drugi štapa, dužine a , je postavljen duž z ose. Tačkasto naelektrisanje, naelektrisano količinom naelektrisanja $Q_T < 0$, nalazi se na x osi, na udaljenosti a od centra sistema.

- Izvesti izraz za ukupni vektor jačine električnog polja, koji u tački A stvaraju štapani i tačkasto naelektrisanje. Tačka A se nalazi na z osi, na udaljenosti a od centra sistema.
- Izračunati brojno potencijal tačke A u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti, koji potiče od štapa dužine a i od tačkastog naelektrisanja.

Brojni podaci su: $a = 1$ cm, $Q' = 1$ nC/m, $Q_T = -1$ nC,
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

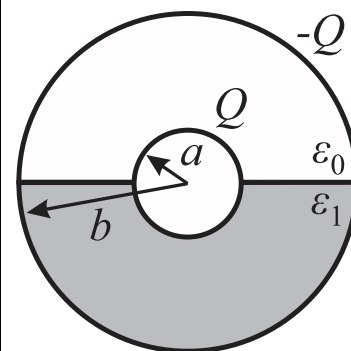


Slika 1.

Zadatak 2. Na slici 2 je prikazan poprečni presek sfernog vazdušnog kondenzatora, permitivnosti ϵ_0 , poluprečnika elektroda $a = 5$ mm i $b = 12$ mm. Jedna polovina zapremine kondenzatora je ispunjena čvrstim dielektrikom permitivnosti $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$.

- Kako se intenziteti vektora jačine električnog polja i električnog pomeraja menjaju u funkciji rastojanja tačke od centra kondenzatora?
- Izvesti izraz za kapacitivnost kondenzatora, a zatim izračunati njenu brojnu vrednost.
- Odrediti maksimalan napon na koji sme da se priključi kondenzator.
- (bonus – 5 poena)** Izračunati količinu vezanog naelektrisanja u dielektriku uz unutrašnju elektrodu kondenzatora, kada je kondenzator priključen na izvor napona $U = 10$ kV.

Ostali brojni podaci su: $E_{c0} = 3$ MV/m, $E_{c1} = 25$ MV/m.



Slika 2.

PRAVILA POLAGANJA

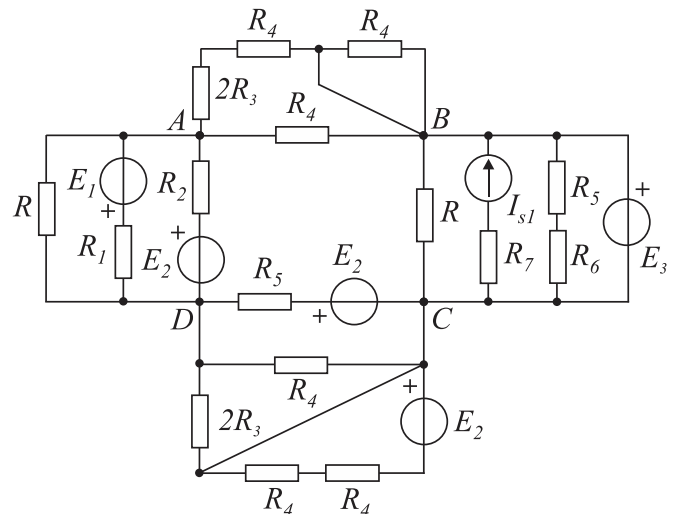
Za položen kolokvijum neophodno je tačno uraditi više od 50% svakog od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje jedan sat i trideset minuta.

ZADACI

Zadatak 1. Mrežu vremenski konstantnih struja sa slike 1, transformisati na sledeći način:

- Deo kola između tačaka A i D uprostiti prostom transformacijom generatora tako, da sadrži samo jedan realan naponski generator.
- Deo kola između tačaka D i C zameniti Tevenenovim generatorom.
- Deo kola između tačaka B i C zameniti Tevenenovim generatorom.
- Nakon uprošćavanja kola, odredite da li se na ekvivalentnoj grupi otpornika između tačaka A i B razvija maksimalna moguća snaga.

Brojni podaci su: $R = R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$,
 $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 6 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 0,5 \text{ k}\Omega$, $R_6 = R_7 = 3 \text{ k}\Omega$,
 $E_1 = 2 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 2,1 \text{ V}$,
 $I_{S1} = 2 \text{ mA}$.



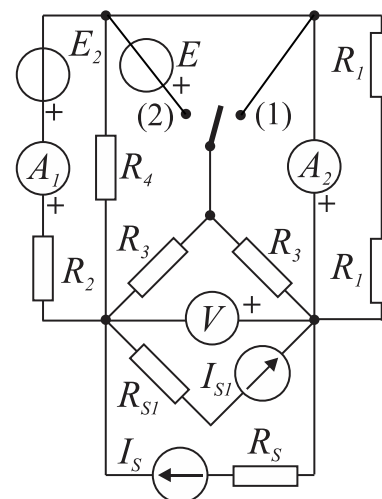
Slika 1.

Zadatak 2. Kada se u mreži sa slike 2, preklopnik prebaci iz položaja (1) u položaj (2), snaga strujnog generatora I_S se povećava za 4 W .

- Primenjujući teoremu superpozicije, odrediti *ems* naponskog generatora E .
- Kada je preklopnik u položaju (2) odrediti pokazivanje idealnih mernih instrumenata kao i
- (bonus – 5 poena)** Izračunati snagu naponskog generatora E .

Ostali brojni podaci su:

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$, $R_{S1} = 5 \Omega$,
 $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_2 = 10 \text{ V}$, $I_S = I_{S1} = 2 \text{ A}$.



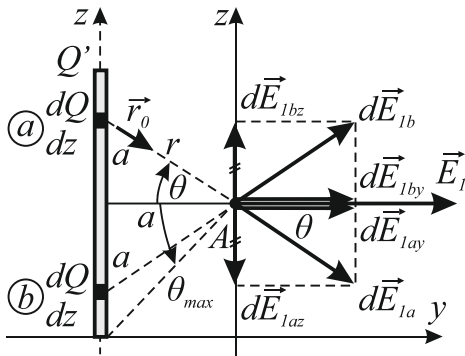
Slika 2.

PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je tačno uraditi više od 50% svakog od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje jedan sat i trideset minuta.

K1 Z1

a)



$$dE_{1a} = dE_{1b} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

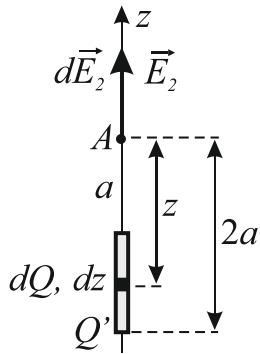
$$\overline{dE}_{1az} + \overline{dE}_{1bz} = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{E}_{1z} = 0}$$

$$dE_{1ay} = dE_{1a} \cos \theta = \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{Q' r d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{\cos \theta} d\theta$$

$$E_1 = 2 \int_{\text{po pola štapa}} dE_{1ay} = 2 \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\theta_{\max}} \cos \theta d\theta = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_{\max} - \sin 0)$$

$$E_1 = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

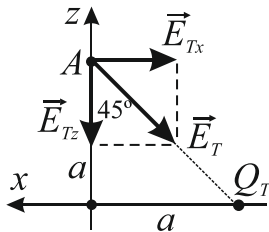
$$\boxed{\overline{E}_1 = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{i}_y}$$



$$dE_2 = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

$$E_2 = \int_{\text{po štapa}} dE_2 = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{2a} \frac{dz}{z^2} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{Q'}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$\boxed{\overline{E}_2 = \frac{Q'}{8\pi\epsilon_0 a} \cdot \vec{i}_z}$$



$$Q_T < 0$$

$$E_T = \frac{|Q_T|}{4\pi\epsilon_0 (a\sqrt{2})^2} = \frac{|Q_T|}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$E_{Tx} = E_T \sin 45^\circ$$

$$\boxed{\overline{E}_{Tx} = \frac{|Q_T|}{8\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i}_x)}$$

$$E_{Tz} = E_T \cos 45^\circ$$

$$\boxed{\overline{E}_{Tz} = \frac{|Q_T|}{8\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i}_z)}$$

$$\boxed{\overline{E}_A = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_{Tx} + \overline{E}_{Tz} = \frac{|Q_T|}{8\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i}_x) + \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{i}_y + \left(\frac{Q'}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{|Q_T|}{8\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \vec{i}_z}$$

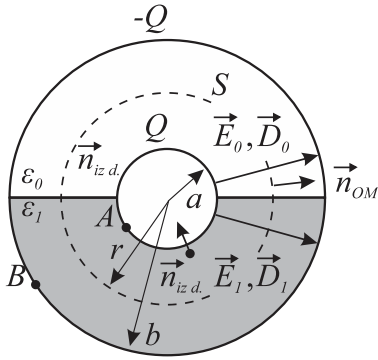
b)

$$V_{AT} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} = -636,6 \text{ V}$$

$$dV_{AS} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q' dr}{4\pi\epsilon_0 r} \quad V_{AS} = \int_{\text{po štapa}} dV_{AS} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \ln 2 = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \ln 2 = 6,24 \text{ V}$$

$$V_A = V_{AT} + V_{AS} \quad \boxed{V_A = -630,4 \text{ V}}$$

a)



Granični uslov:

$$E_{r0} = E_{r1} \quad E_0 = E_1 = E$$

$$D_{n0} = D_{n1} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{slobodno\ u\ S}$$

$$\int_{S_1} D_0 ds + \int_{S_1} D_1 ds = Q$$

$$D_0 2r^2\pi + D_1 2r^2\pi = Q$$

$$\varepsilon_0 E 2r^2\pi + \varepsilon_1 E 2r^2\pi = Q$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 2r^2\pi + \varepsilon_1 2r^2\pi} = \frac{Q}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) 2r^2\pi} = \frac{Q}{10\varepsilon_0 r^2\pi}, \quad a < r < b$$

$$D_0 = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{Q}{10\varepsilon_0 r^2\pi}, \quad a < r < b$$

$$D_1 = \varepsilon_1 E = \varepsilon_1 \frac{Q}{10\varepsilon_0 r^2\pi}, \quad a < r < b$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{10\varepsilon_0 r^2\pi} dr = \frac{Q}{10\varepsilon_0\pi} \frac{b-a}{ab}$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} \quad \boxed{C = \frac{10\varepsilon_0 \pi ab}{b-a}} \quad \boxed{C = 0,24 \text{ pF}}$$

c)

$$E_{\max 0} = E_{\max 1} = E_{\max(r=a)} = \frac{Q_{\max}}{10\varepsilon_0 a^2\pi} = \min\{E_{\varepsilon_0}, E_{\varepsilon_1}\} = E_{\varepsilon_0} = 3 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

$$\frac{C U_{\max}}{10\varepsilon_0 a^2\pi} = E_{\varepsilon_0}$$

$$U_{\max} = \frac{E_{\varepsilon_0} 10\varepsilon_0 a^2\pi}{C} = \frac{E_{\varepsilon_0} 10\varepsilon_0 a^2\pi}{\frac{10\varepsilon_0 \pi ab}{b-a}} = E_{\varepsilon_0} (b-a) \frac{a}{b} \quad \boxed{U_{\max} = 8,75 \text{ kV}}$$

d) (bonus – 5 poena)

$$r = a, \quad U = 10 \text{ kV} \quad \rightarrow \quad Q = CU = 2,4 \text{ nC}$$

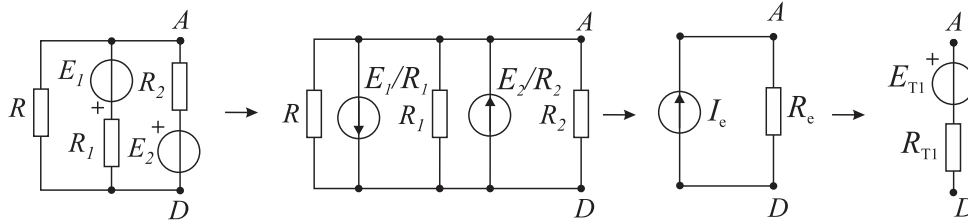
$$P_1(r=a) = D_1 - \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_1 E - \varepsilon_0 E = (\varepsilon_{r1} - 1)\varepsilon_0 E = (4-1)\varepsilon_0 \frac{Q}{10\varepsilon_0 a^2\pi} = \frac{3Q}{10a^2\pi}$$

$$\sigma_{v1} = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_{iz\ diel.} = -P_1(r=a) = -\frac{3Q}{10a^2\pi}$$

$$Q_{v1} = \sigma_{v1} \frac{4a^2\pi}{2} = -\frac{3Q}{10a^2\pi} 2a^2\pi = -\frac{3Q}{5} \quad \boxed{Q_{v1} = -1,43 \text{ nC}}$$

K2 Z1

a)



$$R_{T1} = R_e = R \parallel R_1 \parallel R_2 = 2k \parallel 2k \parallel 4k$$

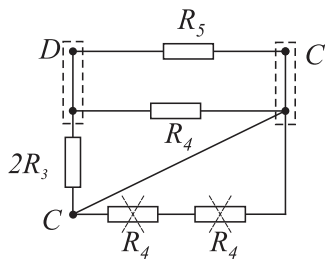
$$R_{T1} = 0,8 \text{ k}\Omega$$

$$I_e = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = -1\text{mA} + 2\text{mA} = 1\text{mA}$$

$$E_{T1} = R_e I_e = 0,8k \cdot 1\text{mA}$$

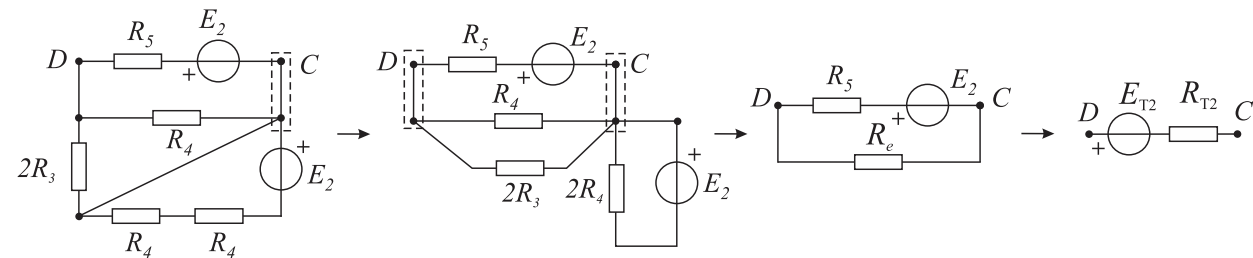
$$E_{T1} = 0,8 \text{ V}$$

b)



$$R_{T2} = R_5 \parallel 2R_3 \parallel R_4 = 0,5k \parallel 2k \parallel 6k$$

$$R_{T2} = 375 \Omega$$



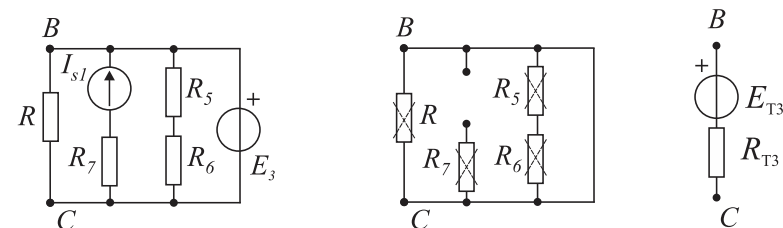
$$R_{e1} = 2R_3 \parallel R_4 = 1,5k\Omega$$

$$R_{T2} = R_{e1} \parallel R_5 = 0,5k \parallel 1,5k = 375 \Omega$$

$$E_{T2} = U_{DC} = \frac{R_e}{R_e + R_5} E_2 = \frac{1,5k}{1,5k + 0,5k} \cdot 8$$

$$E_{T2} = 6 \text{ V}$$

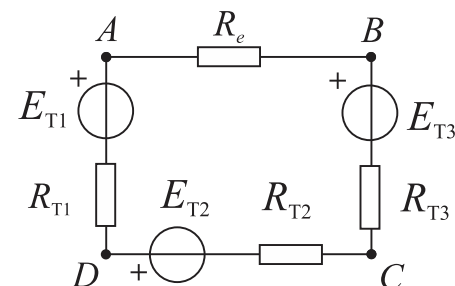
c)



$$R_{T3} = 0 \Omega$$

$$E_{T3} = E_3 = 2,1 \text{ V}$$

d)



$$R_e = (R_4 + 2R_3) \parallel R_4 = 8k \parallel 6k = 3,43k\Omega$$

$$R_{T_e} = R_{T1} + R_{T2} + R_{T3} = 0,8k + 0,375k + 0k = 1,175k\Omega$$

Kako je $R_e \neq R_{T_e}$

zaključujemo da se na R_{T_e} ne razvija maksimalna moguća snaga.

K2 Z2

a)

1. Na osnovu uslova teksta zadatka:

$$P_{IS}^{(2)} = P_{IS}^{(1)} + \Delta P_{IS} = P_{IS}^{(1)} + 4 \text{ W} \quad \Delta P_{IS} = I_S \Delta U_{IS} \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{IS} = \frac{\Delta P_{IS}}{I_S} = \frac{4}{2} = 2 \text{ V}$$

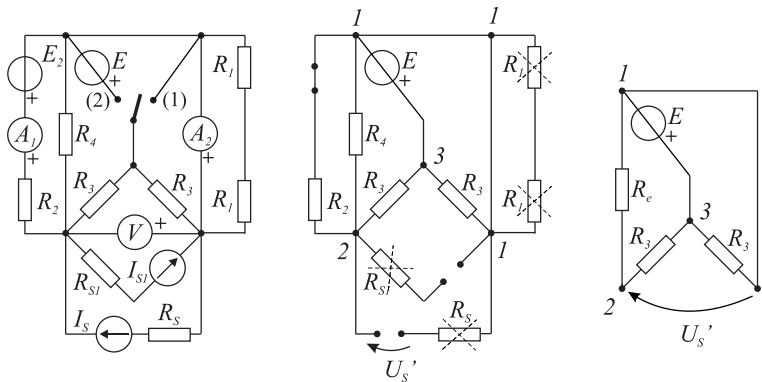
2. Na osnovu teoreme superpozicije:

$$\boxed{\text{Svi generatori}} = \boxed{\text{Svi sem } E} + \boxed{\text{Samo } E}$$

(2) (1)

Preklopnik u položaju (2) Preklopnik u položaju (1) Deluje samo n.g. ems E
 (deluju svi generatori) (deluju svi generatori U_{IS}'
 $U_{IS}^{(2)}$ osim n.g. ems E)
 $U_{IS}^{(1)}$

Na osnovu 1 i 2 sledi da je $U_{IS}' = \Delta U_{IS} = 2 \text{ V}$



$$R_e = R_4 \parallel R_2 = 10 \parallel 10 = 5 \Omega$$

$$E = \frac{R_3 + R_e}{R_e} U_s' = \frac{10 + 5}{5} \cdot 2$$

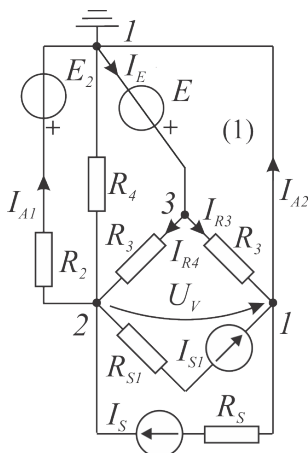
$$\boxed{E = 6 \text{ V}}$$

b)

$$V_1 = 0 \text{ V}, \quad V_3 = E = 5 \text{ V}$$

$$V_2 \left(\frac{1}{R_S + \infty} + \frac{1}{R_{S1} + \infty} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + 0} \right) - V_1 \left(\frac{1}{R_S + \infty} + \frac{1}{R_{S1} + \infty} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - V_3 \frac{1}{R_3} = -I_{S1} + I_S + \frac{E_2}{R_2}$$

$$V_2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) - 5 \frac{1}{10} = -2 + 2 + \frac{10}{10} \quad \Rightarrow \quad V_2 = 5 \text{ V}$$



$$U_V = V_1 - V_2 = 0 - 5 = -5 \text{ V}$$

$$\boxed{U_V = -5 \text{ V}}$$

$$I_{R3} = \frac{V_3 - V_1}{R_3} = \frac{5 - 0}{10} = 0,5 \text{ A} \quad I_{A2} = I_{R3} + I_{S1} - I_S = 0,5 + 2 - 2 = 0,5 \text{ A}$$

$$\boxed{I_{A2} = 0,5 \text{ A}}$$

$$I_{A1} = \frac{V_2 - V_1 - E_2}{R_2} = \frac{5 - 0 - 10}{10} = -0,5 \text{ A}$$

$$\boxed{I_{A1} = -0,5 \text{ A}}$$

c) (bonus – 5 poena)

$$I_{R4} = \frac{V_3 - V_2}{R_3} = \frac{5 - 5}{10} = 0 \text{ A}$$

$$I_E = I_{R3} + I_{R4} = 0,5 \text{ A}$$

$$P_E = E I_E = 6 \cdot 0,5$$

$$\boxed{P_E = 3 \text{ W}}$$