

Industrijsko inženjerstvo

Osnovi elektrotehnike

Prostoperiodične struje 1

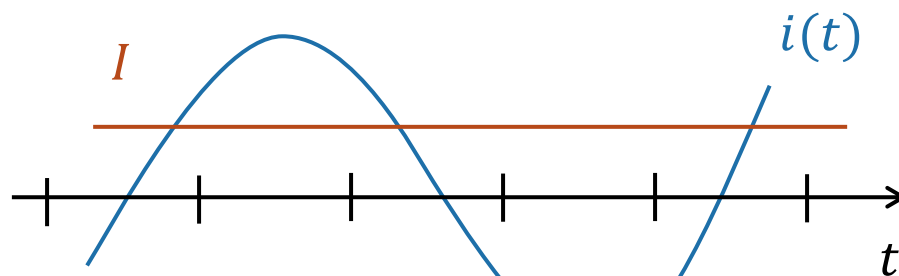
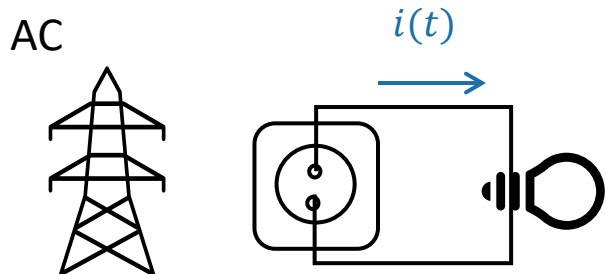
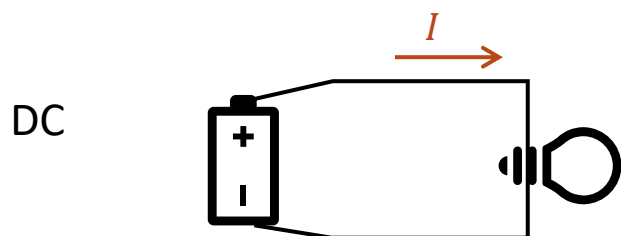
- Vremenski oblik
- Napon i struja na R, L i C
- Kompleksni domen

van. prof. dr Miodrag Milutinov

kabinet 132 NTP

miodragm@uns.ac.rs

Vremenski oblik



$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

ili

$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

Vremenski oblik

Prostoperiodični signali

$$a(t) = A_m \sin(\omega t)$$

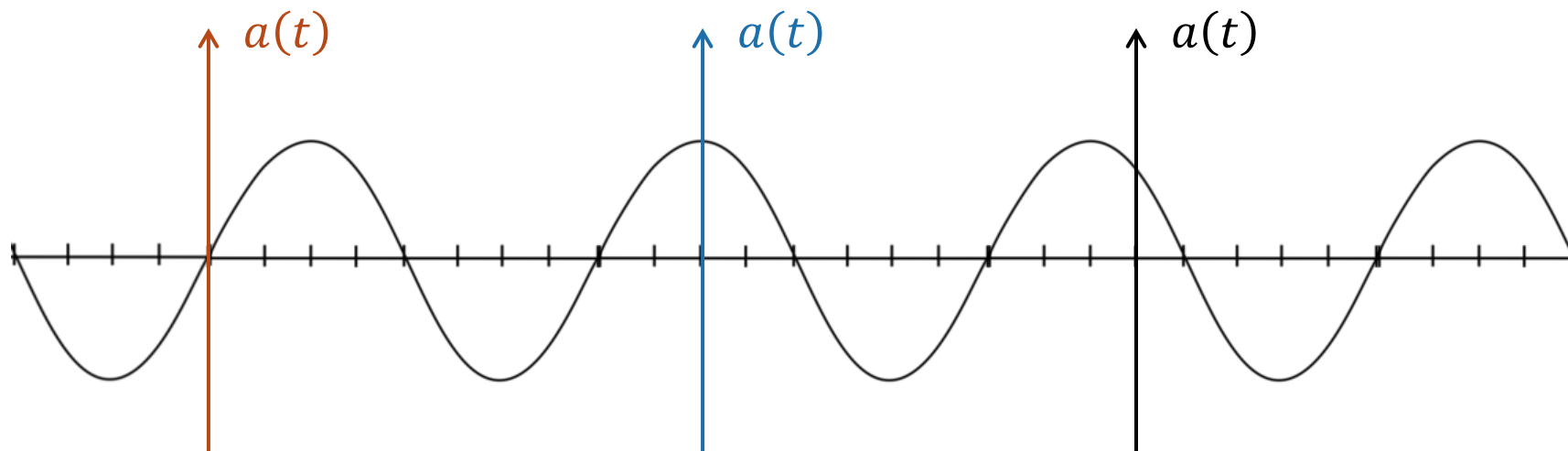
$$a(t) = A_m \cos(\omega t)$$

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

1. Amplituda: A_m

2. Faza: $(\omega t + \alpha)$

3. Početna faza: α



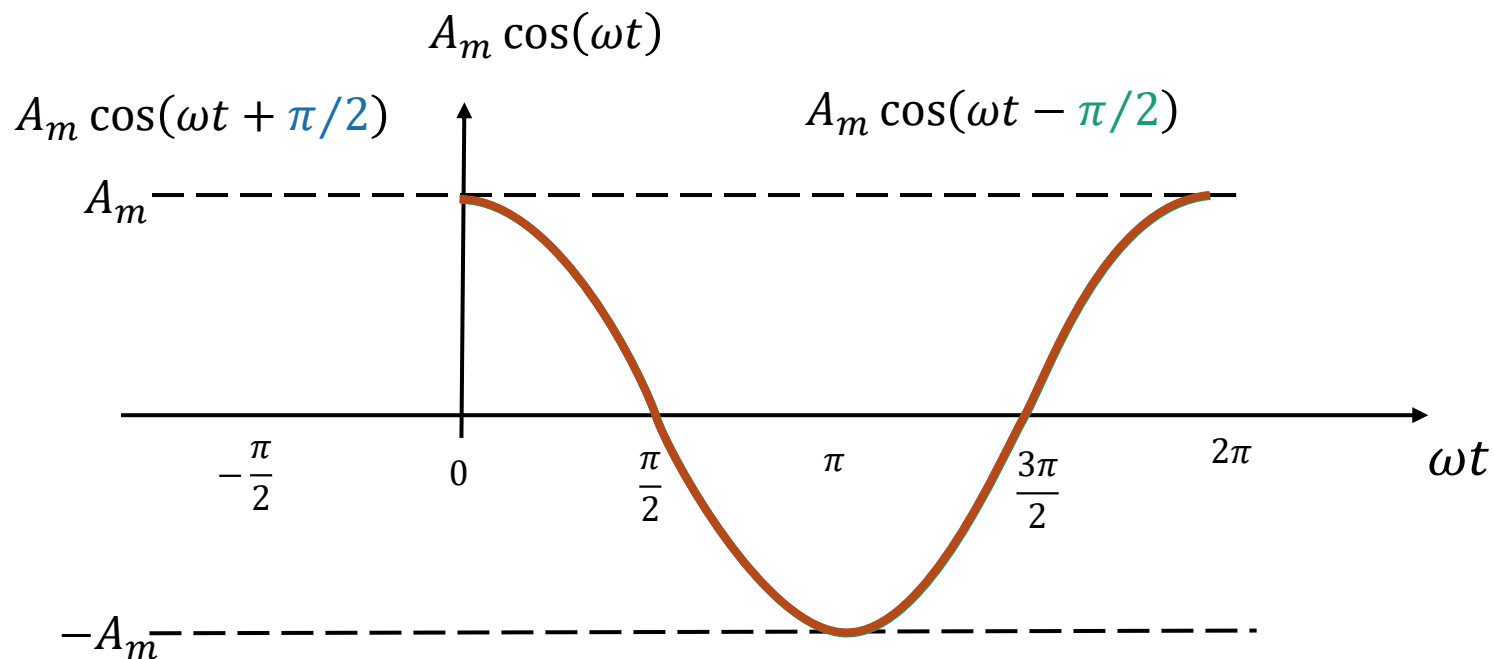
Vremenski oblik

$$a = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\alpha = 0$$

$$\alpha = \pi/2$$

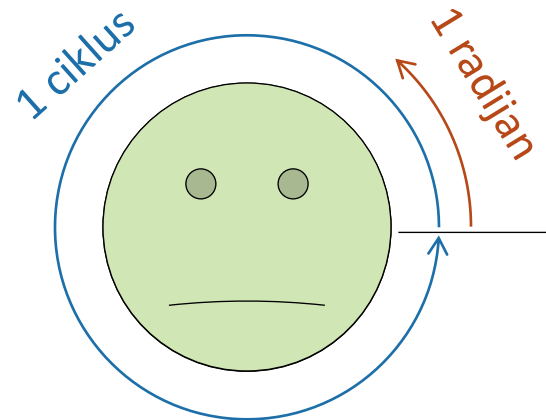
$$\alpha = -\pi/2$$



Vremenski oblik

$$a = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

- 4. Kružna frekvencija ω [rad/s] - ugaoni pomeraj u jedinici vremena
- 5. Frekvencija f [Hz] - broj ciklusa u jedinici vremena

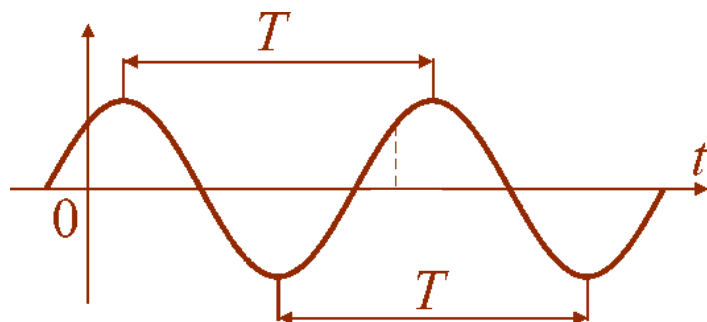


$$1 \text{ ciklus} = 2\pi \text{ radijana}$$

$$\omega = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$T = 0,02 \text{ s}$$



$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

- 6. Osnovna perioda T [s] - najkraći vremenski interval između dva ponavljanja.

Napon i struja u električnim kolima

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

Napon i struja su potpuno opisani sa:

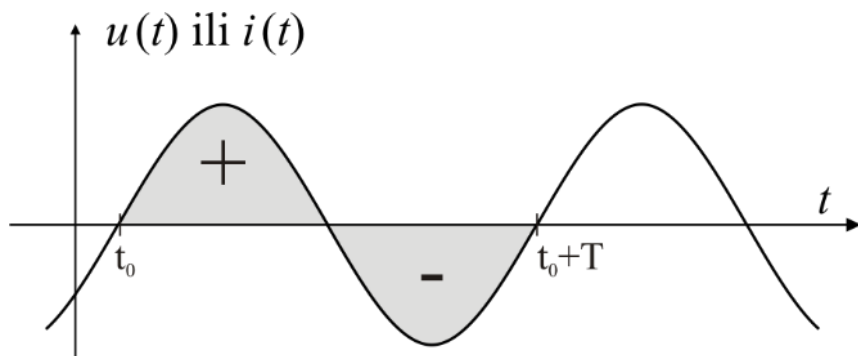
1. amplitudom: U_m , I_m
2. kružnom frekvencijom: ω
3. početnom fazom: θ , ψ

U jednom električnom kolu napon i struja imaju istu kružnu frekvenciju.

Napon i struja u električnim kolima

Srednja vrednost pp. veličine

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta)$$



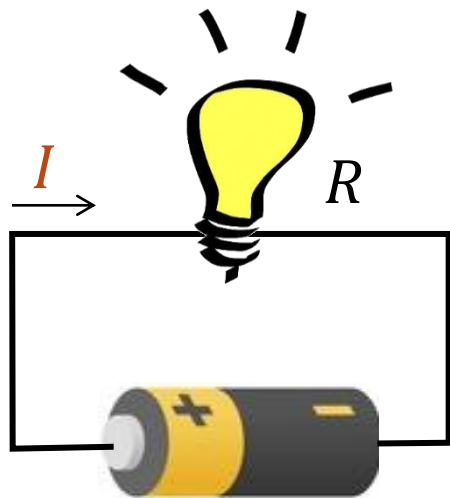
$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u \, dt$$

$$U_{sr} = 0$$

Srednja vrednost svake PROSTOPERIODIČNE veličine je nula

Napon i struja u električnim kolima

Efektivna vrednost

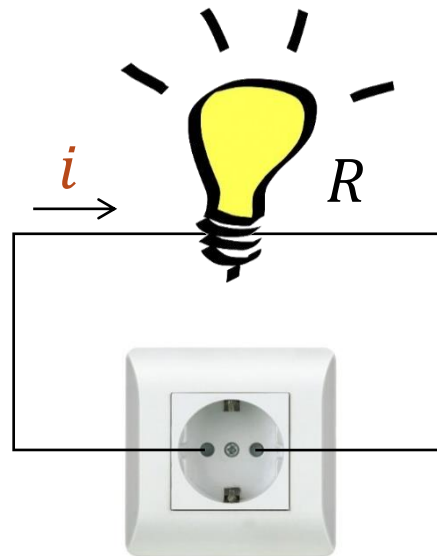


$$P = RI^2$$

$$P = P_{sr}$$

$$I \overset{?}{\leftrightarrow} I_m$$

$$i = I_m \cos(\omega t)$$



$$p = Ri^2$$

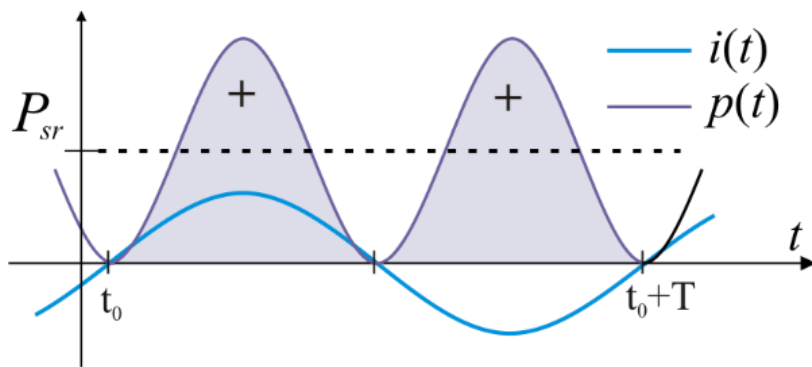
Napon i struja u električnim kolima

Efektivna vrednost

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$p = Ri^2 = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \psi)$$

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p dt = R \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = R \frac{I_m^2}{2}$$

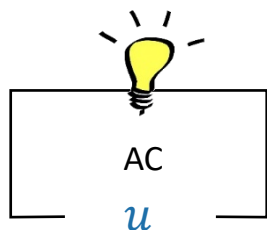


$$P = P_{sr} \quad \rightarrow \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

EFEKTIVNA VREDNOST
PROSTOPERIODIČNE STRUJE

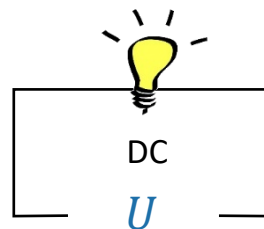
Napon i struja u električnim kolima

Efektivna vrednost



$$p = \frac{u^2}{R}$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta)$$



$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$P = P_{sr} \rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p \, dt = R \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{u^2}{R} \, dt = \frac{U_m^2}{2R}$$

EFEKTIVNA VREDNOST
PROSTOPERIODIČNOG NAPONA

Napon i struja u električnim kolima

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi)$$

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta)$$

Napon i struja u električnim kolima

Primer

Dat je prostoperiodičan napon

$$u = 35 \cos(314t + \pi/6) \text{ V}$$

Odrediti njegovu

- a) maksimalnu vrednost
- b) efektivnu vrednost
- c) kružnu frekvenciju
- d) početnu fazu
- e) frekvenciju
- f) osnovnu periodu

Poređenjem sa standardnim oblikom

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta) \quad \text{dobija se:}$$

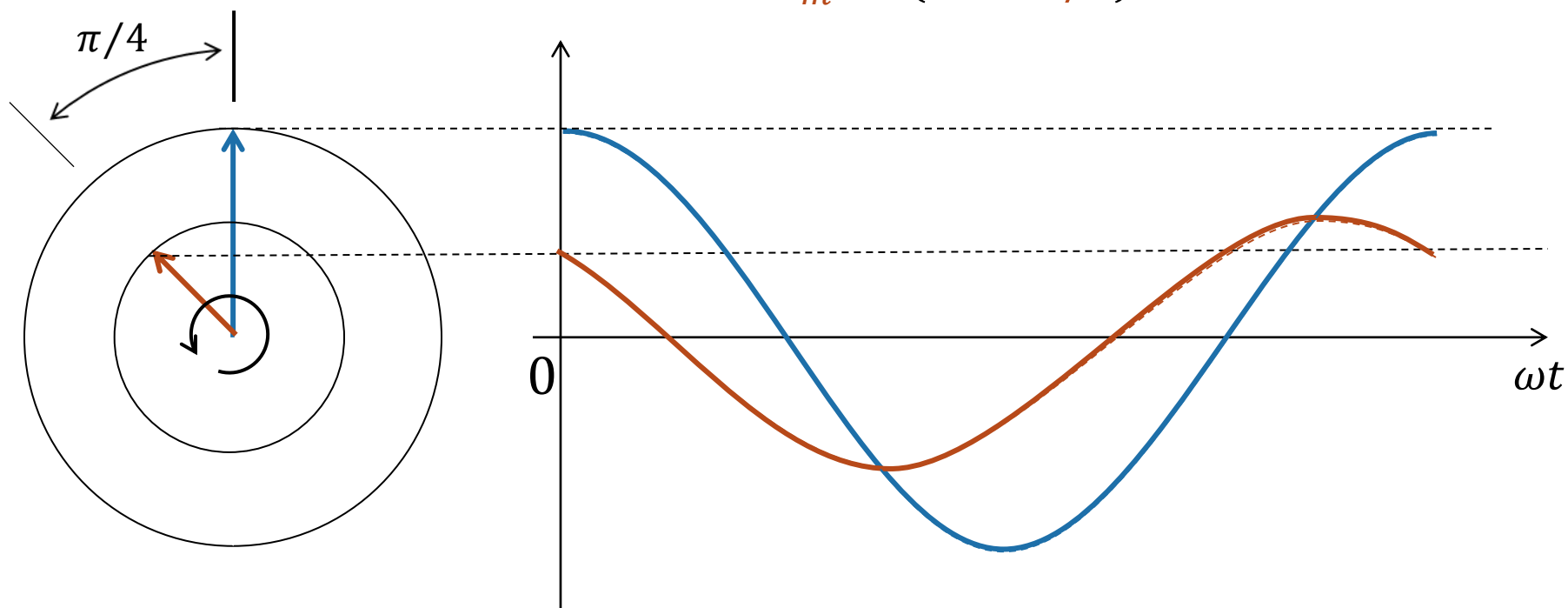
- a) $U_m = 35 \text{ V}$
- b) $U = 35/\sqrt{2} = 24,8 \text{ V}$
- c) $\omega = 314 \text{ rad/s}$
- d) $\theta = \pi/6 \text{ rad}$
- e) $f = \omega/(2\pi) = \frac{314}{6,28} = 50 \text{ Hz}$
- f) $T = 1/f = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$

Napon i struja u električnim kolima

Fazori – obrtni vektori

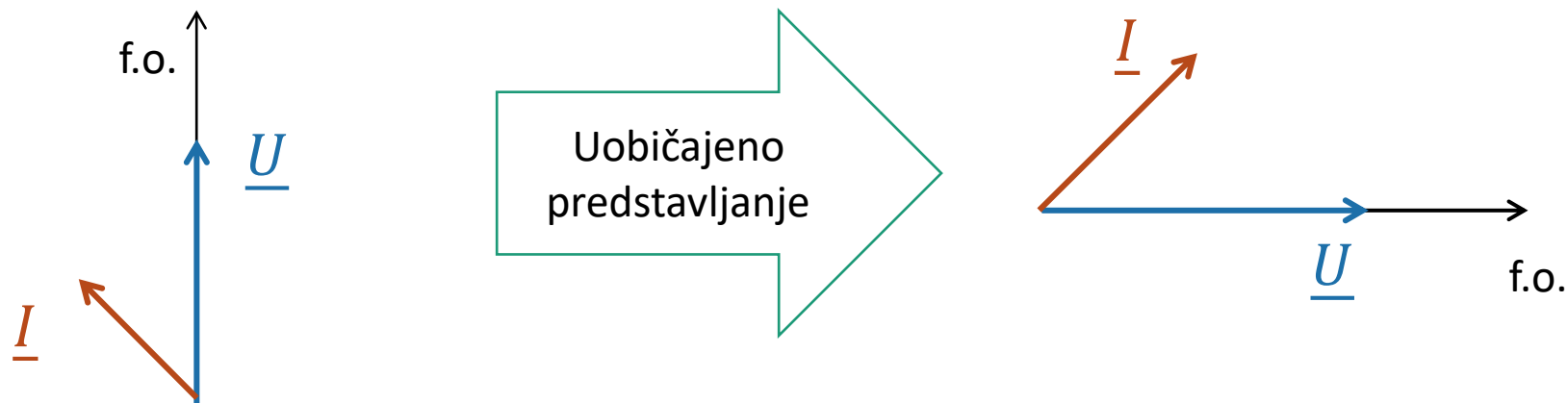
$$u = U_m \cos(\omega t + 0)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \pi/4)$$



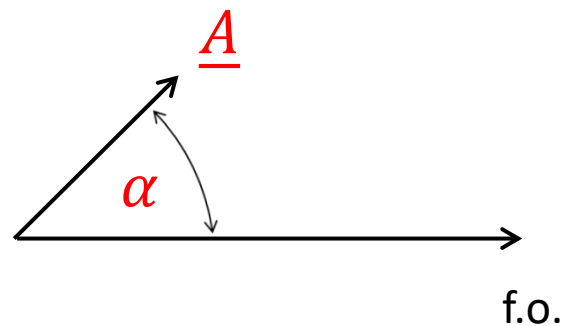
Napon i struja u električnim kolima

Fazori – obrtni vektori



Signal $a = A_m \cos(\omega t + \alpha)$ može da se predstavi fazorom $\underline{A}$ koji je u početnom trenutku u položaju pod uglom α .

Dužina fazora je A_m .



Kompleksni brojevi

$\underline{A} = a + j b$, algebarski oblik

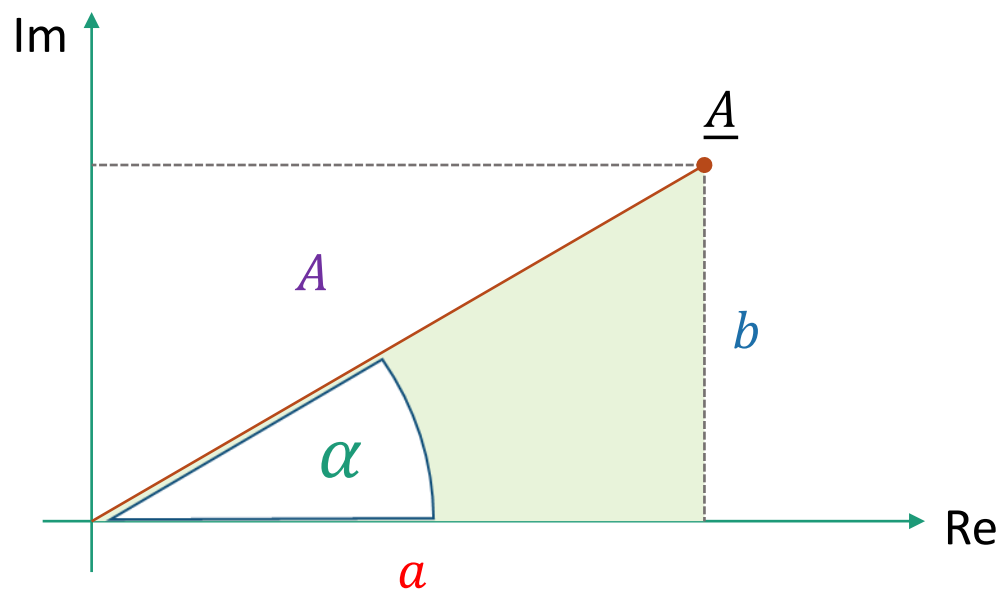
a – realni

A – moduo

b – imaginarni

α – argument

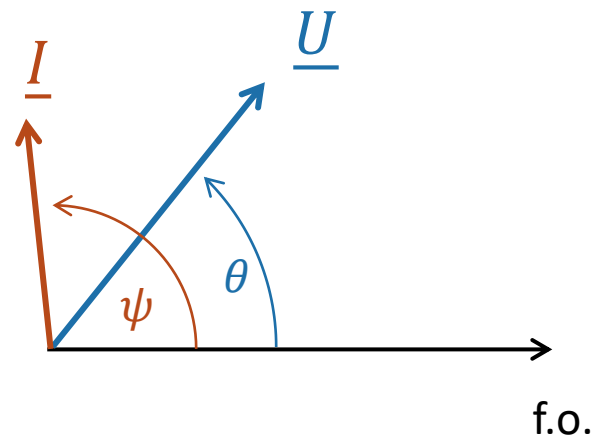
$\underline{A} = A e^{j\alpha}$, eksponencijalni oblik



Napon i struja u električnim kolima

Kompleksne efektivne vrednosti

- PP veličina: $u = U_m \cos(\omega t + \theta)$
 - Efektivna vrednost:
 $U = U_m / \sqrt{2}$
 - Početna faza: θ
- Kompleksni predstavnik: $\underline{U} = U e^{j\theta}$
 - Moduo: U
 - Argument: θ



Napon i struja u električnim kolima

PRIMER

$$u = 28,2 \cos(\omega t - \pi/3) \text{ V}$$

$$U_m = 28,2 \text{ V}, \quad U = 20 \text{ V}$$

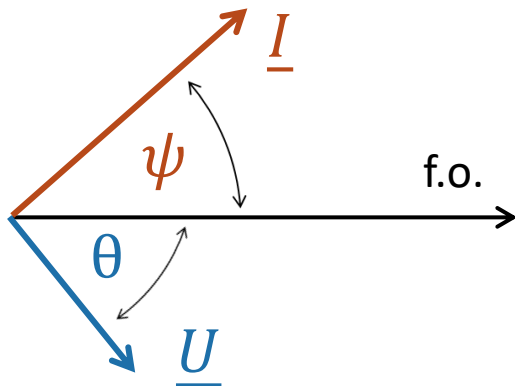
$$\theta = -\pi/3, \quad \underline{U} = 20e^{-j\pi/3} \text{ V}$$

PRIMER

$$i = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4) \text{ A}$$

$$I_m = 10\sqrt{2} \text{ A} \quad I = 10 \text{ A}$$

$$\psi = \pi/4 \quad \underline{I} = 10e^{j\pi/4} \text{ A}$$



Kompleksni brojevi

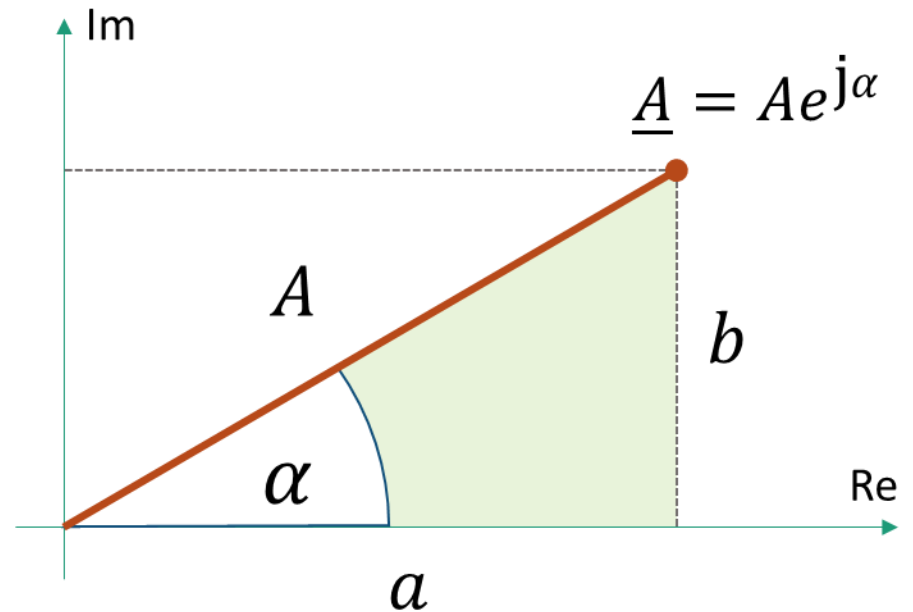
$$\underline{A} = Ae^{j\alpha}$$



$$\underline{A} = a + jb$$

$$\underline{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

$$a = A \cos \alpha, \quad b = A \sin \alpha$$



Kompleksni predstavnik pp veličine

$$\underline{U} = U e^{j\theta}$$

$$\underline{U} = U \cos \theta + jU \sin \theta$$

$$\underline{I} = I e^{j\psi}$$

$$\underline{I} = I \cos \psi + jI \sin \psi$$

PRIMER

$$\begin{aligned}\underline{U} &= 20e^{-j\pi/3} \text{ V} = \\ &= 20 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \text{ V}\end{aligned}$$

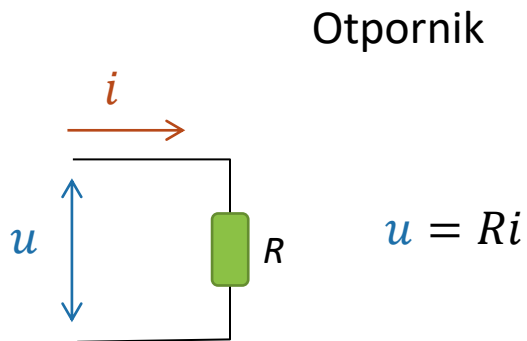
$$\underline{U} = (10 - j10\sqrt{3}) \text{ V}$$

PRIMER

$$\begin{aligned}\underline{I} &= 10e^{j\pi/4} \text{ A} = \\ &= 10 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \text{ A}\end{aligned}$$

$$\underline{I} = (5\sqrt{2} + j5\sqrt{2}) \text{ A}$$

Napon i struja u električnim kolima



$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$u = RI_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

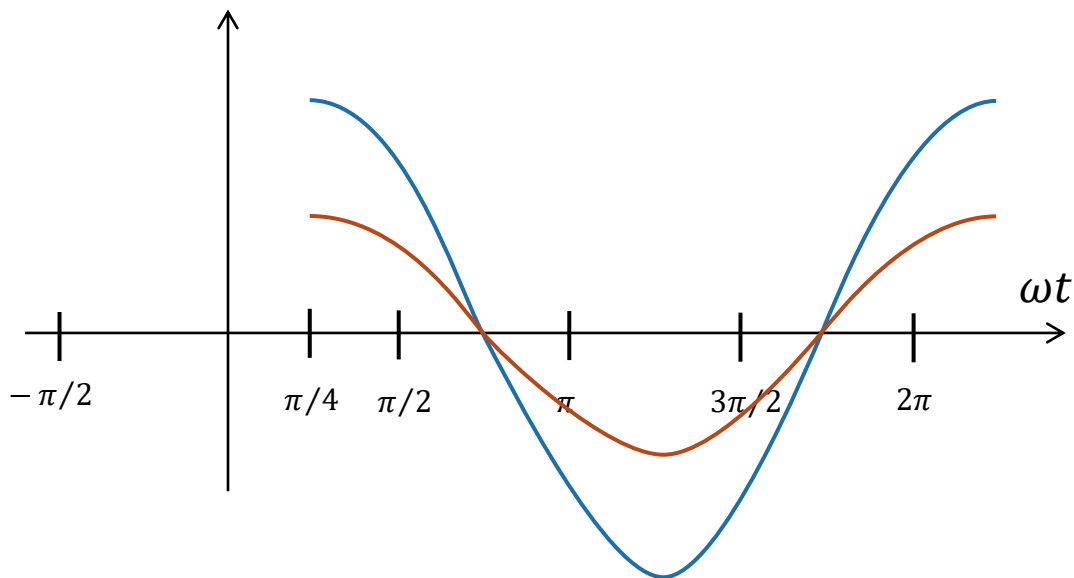
- $U_m = RI_m$, $U = RI$

- $\theta = \psi$

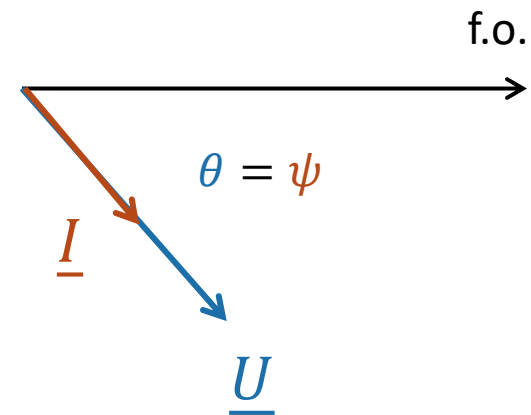
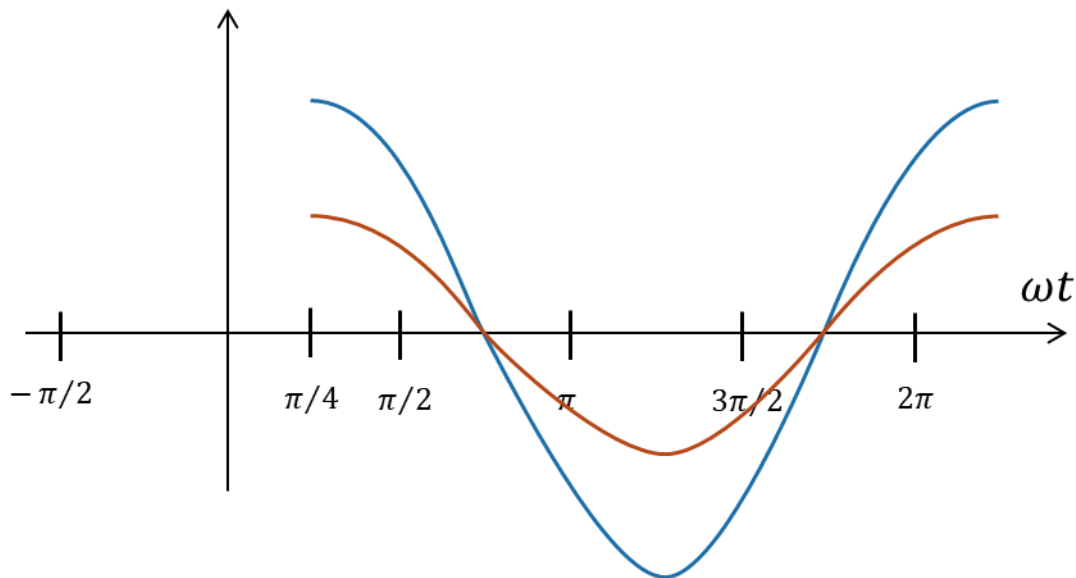
- Fazna razlika (Razlika početnih faza) : $\varphi = \theta - \psi = 0$

$$u = U_m \cos(\omega t - \pi/4)$$

$$i = I_m \cos(\omega t - \pi/4)$$



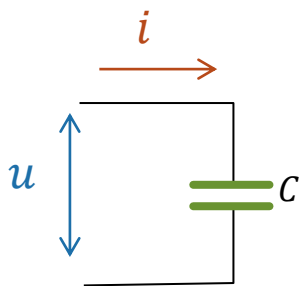
Napon i struja u električnim kolima



Na otporniku su napon i struja u fazi.

Napon i struja u električnim kolima

Kondenzator



$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$i = -\omega C U_m \sin(\omega t + \theta) = \omega C U_m \cos(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$u = U_m \cos(\omega t - \pi/4)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \pi/4)$$

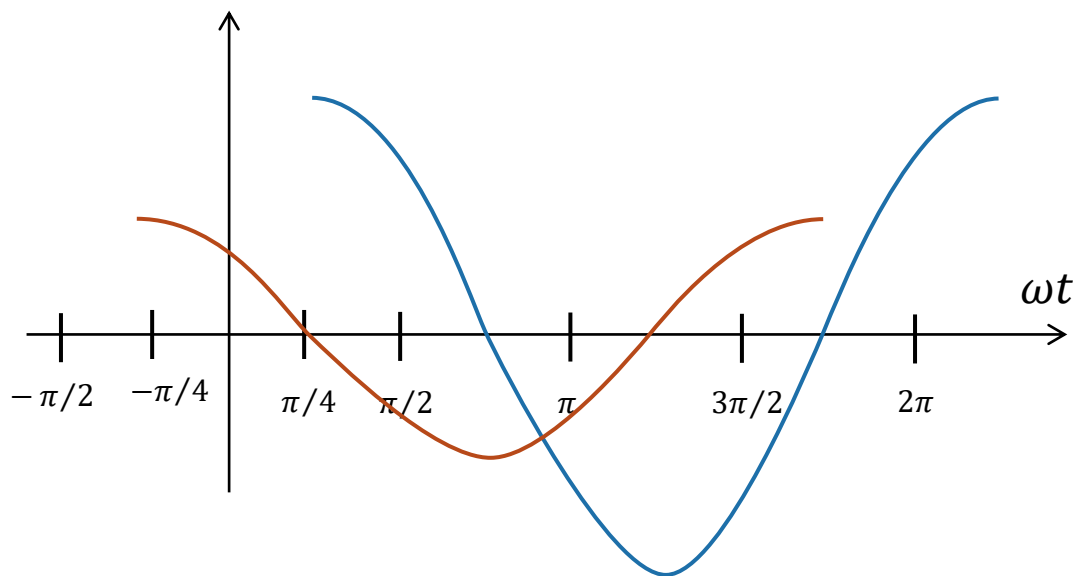
$$I_m = \omega C U_m$$

$$I = \omega C U$$

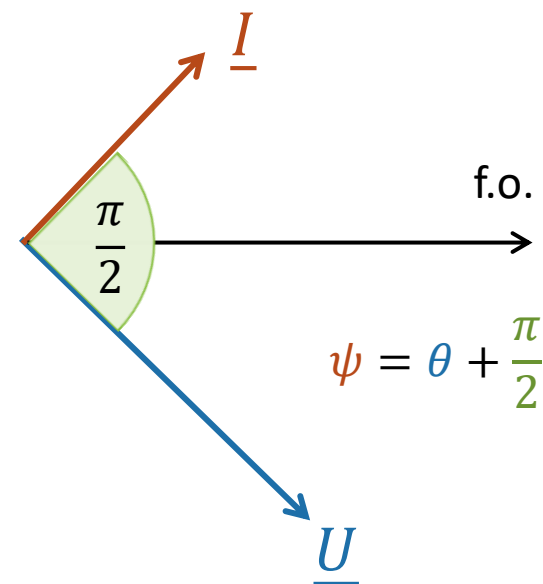
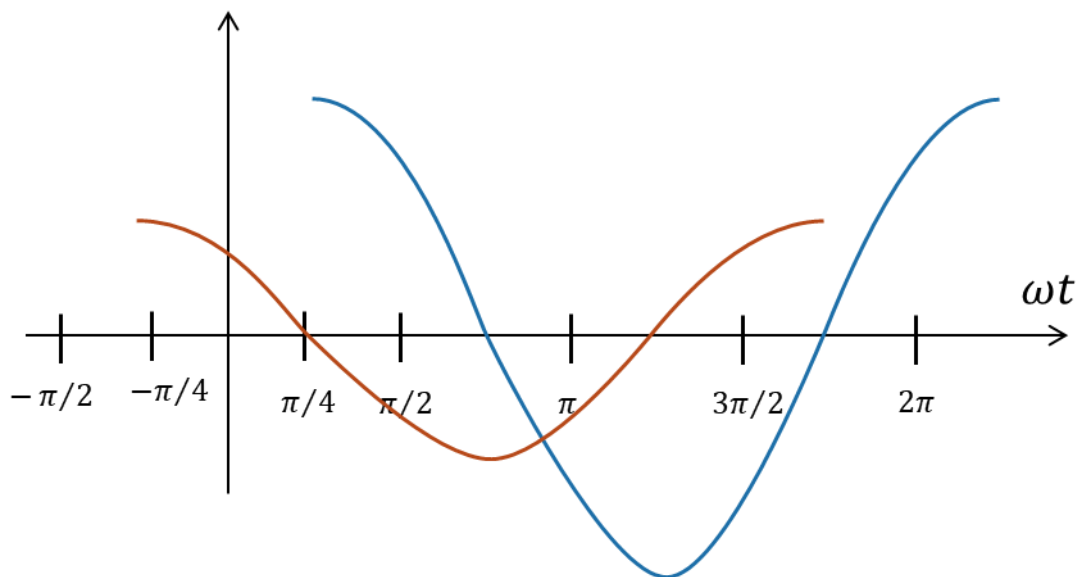
$$\psi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

Struja je uvek ispred napona za $\pi/2$.

$$\varphi = \theta - \psi = -\frac{\pi}{2}$$



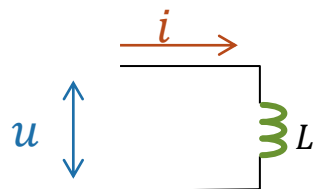
Napon i struja u električnim kolima



Na kondenzatoru struja je uvek ispred napona za $\pi/2$.

Napon i struja u električnim kolima

Kalem



$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$u = -\omega L I_m \sin(\omega t + \psi) = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$U_m = \omega L I_m$$

$$U = \omega L I$$

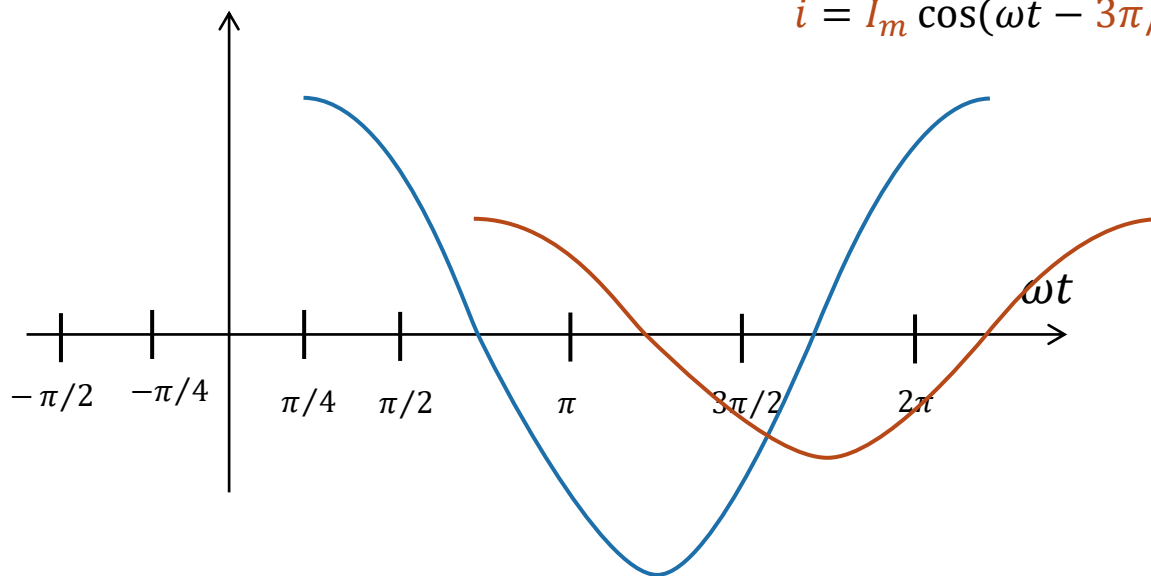
$$\theta = \psi + \frac{\pi}{2}$$

Napon je uvek
ispred struje za $\pi/2$.

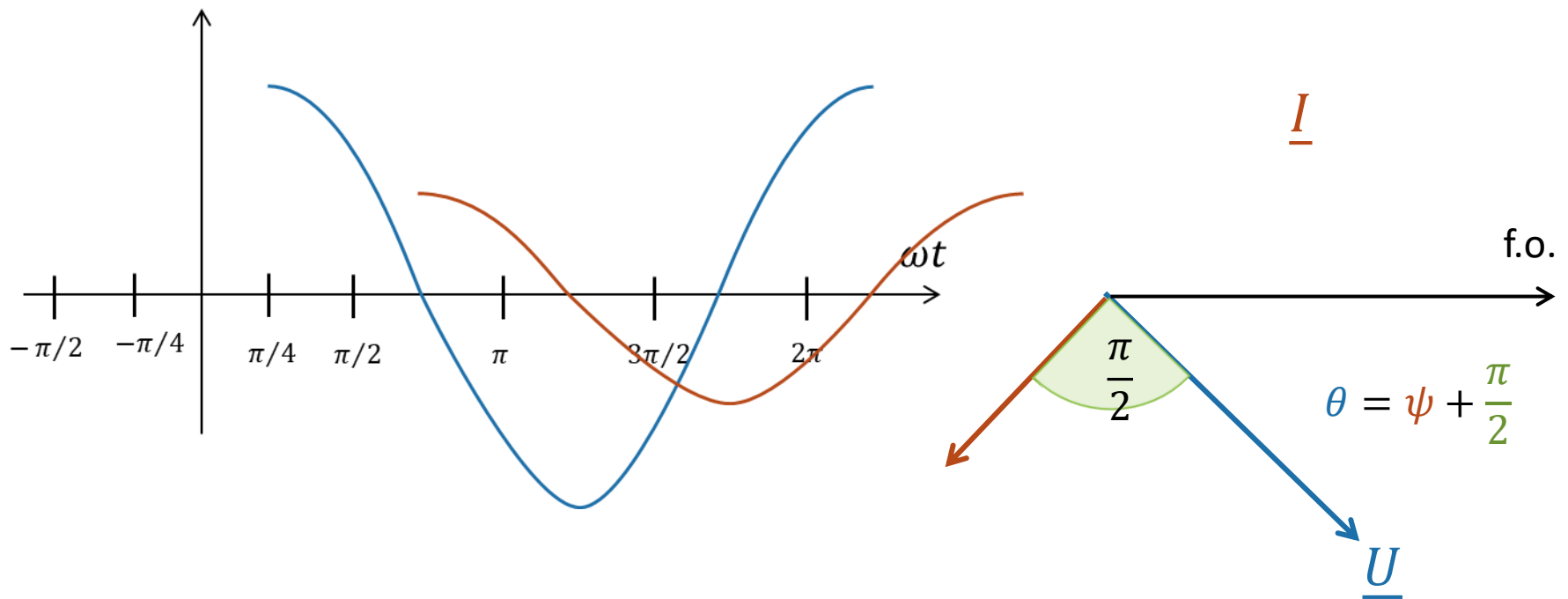
$$\varphi = \theta - \psi = +\frac{\pi}{2}$$

$$u = U_m \cos(\omega t - \pi/4)$$

$$i = I_m \cos(\omega t - 3\pi/4)$$



Napon i struja u električnim kolima



Napon je uvek ispred struje za $\pi/2$.

Pitanja

1. Kada kažemo da je neka funkcija prostoperiodična?
2. Da li je sledeća funkcija prostoperiodična: $i(t) = I_m \cos(\omega t + \pi)$?
3. Navesti nazive svih parametara (veličina) u izrazu: $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$.
4. Koja tri parametra jednoznačno određuju prostoperiodičnu funkciju?
5. Šta je fazna razlika napona i struje?
6. Kolika je fazna razlika napona $u(t) = 20 \cos(\omega t + \pi/2)V$ i struje $i(t) = 10 \cos(\omega t - \pi)mA$?
7. Da li je veća maksimalna vrednost struje ili njena efektivna vrednost?
8. Ako je maksimalna vrednost struje 100 mA, kolika je njena efektivna vrednost?
9. Ako se početna faza struje poveća 2 puta, da li će se i koliko puta povećati amplituda?
10. Ako je početna faza struje $(\pi/6)$ ili 30° , kolika je početna fazna napona na otporniku?
11. Ako je početna faza struje $(-\pi/6)$ ili -30° , kolika je početna fazna napona na kalemu?
12. Ako je početna faza struje $(\pi/2)$ ili 90° , kolika je početna fazna napona na kondenzatoru?
13. Na kom elementu napon prednjači struji?