

3. Prostoperiodične struje

3.1. Električna kola prostoperiodičnih struja – zadaci

Prvi Kirhofov zakon napisan za kompleksne predstavnike struja glasi

$$\sum \underline{I} = 0. \quad (3.1)$$

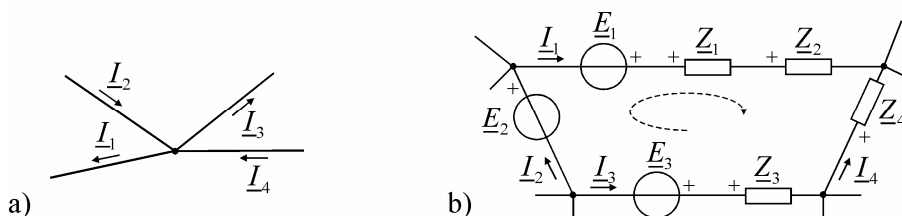
Pravilo o predznacima je isto kao i u slučaju vremenski konstantnih struja. Prvi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir kompleksnih struja grana koje se stiču u jednom čvoru jednak nuli.

Drugi Kirhofov zakon napisan za kompleksne predstavnike napona glasi

$$\sum \underline{U} = 0. \quad (3.2)$$

Smer obilaska konture se bira između dva moguća smera. Pravilo o predznacima je isto kao i u slučaju vremenski konstantnih struja. Drugi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir kompleksnih napona duž zatvorene konture jednak nuli.

U primeru prikazanom na slici 3.1.a je $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_4 = 0$. Za usvojen smer obilaska konture na slici 3.1.b je $\underline{E}_3 - \underline{E}_2 - \underline{E}_1 + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_1 - \underline{Z}_4 \underline{I}_4 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = 0$.



Slika 3.1. Primeri uz a) Prvi i b) Drugi Kirhofov zakon.

Posledica Drugog Kirhofovog zakona je da se napon između dve tačke u kolu može odrediti kao algebarski zbir napona svih elemenata duž proizvoljnog puta od prve do druge tačke.

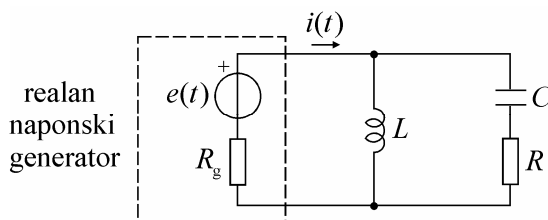
Prilikom rešavanja električnog kola potrebno je pretpostaviti referentne smerove struja u svim granama kola i obeležiti krajeve višeg potencijala na svim impedansama i strujnim generatorima. Način formiranja jednačina po Prvom i Drugom Kirhofovom zakonu je isti kao i kod vremenski konstantnih struja. Za električno kolo sa n_ϵ čvorova i n_g grana piše se $(n_\epsilon - 1)$ jednačina na osnovu Prvog Kirhofovog zakona i $n_g - (n_\epsilon - 1)$ jednačina na osnovu Drugog Kirhofovog zakona.

Zadatak 3.1

U električnom kolu, prikazanom na slici 3.1.1, izračunati

- kompleksne impedanse kalema i kondenzatora,
- ekvivalentnu impedansu koju vidi realan naponski generator,
- kompleksnu struju u grani sa naponskim generatorom.

Brojni podaci su: $e(t) = 230\sqrt{2} \cos(314t + \pi/3) \text{ V}$, gde je t izraženo u sekundama, $R_g = 5 \Omega$, $L = 0,5 \text{ H}$, $C = 30 \mu\text{F}$ i $R = 50 \Omega$.



Slika 3.1.1. Analizirano kolo.

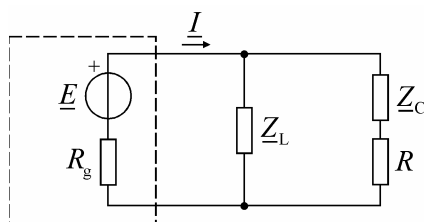
Rešenje.

a) Iz izraza za elektromotornu silu može da se pročita da je kružna učestanost jednaka $\omega = 314 \text{ rad/s}$. Kompleksne impedanse kalema i kondenzatoru su

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j314 \cdot 0,5 = j157 \Omega,$$

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{314 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = -j \frac{10^6}{314 \cdot 30} = -j106 \Omega.$$

Analizirano kolo u kompleksnom domenu prikazano je na slici 3.1.2.

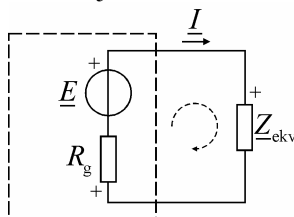


Slika 3.1.2. Analizirano kolo u kompleksnom domenu.

b) Impedansa koju vidi realan naponski generator je ekvivalentna impedansa paralelne veze impedanse kalema $\underline{Z}_L$ i redno vezanih impedansi kondenzatora $\underline{Z}_C$ i otpornika otpornosti R ,

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \frac{\underline{Z}_L (R + \underline{Z}_C)}{\underline{Z}_L + R + \underline{Z}_C} = \frac{j157(50 - j106)}{j157 + 50 - j106} = (242 - j89,5) \Omega.$$

c) Kada se mešovita veza impedansi zameni ekvivalentnom impedansom koju vidi realan naponski generator, dobija se ekvivalentno električno kolo na slici 3.1.3.



Slika 3.1.3. Ekvivalentno kolo.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile je

$$\underline{E} = 230 e^{j\pi/3} \text{ V} = (230 \cos \pi/3 + j 230 \sin \pi/3) \text{ V} = (115 + j199) \text{ V}.$$

Kompleksna struja $\underline{I}$ kroz generator može da se odredi iz jednačine napisane po Drugom Kirhofovom zakonu za ekvivalentno kolo prikazano na slici 3.1.3. Za označen smer obilaska dobija se

$$-\underline{E} + \underline{Z}_{\text{ekv}} \underline{I} + \underline{Z}_g \underline{I} = 0,$$

i iznosi

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R_g + \underline{Z}_{\text{ekv}}} = \frac{115 + j199}{5 + 242 - j89,5} = (0,15 + j0,86) \text{ A}.$$

~~Zadatak 3.2~~

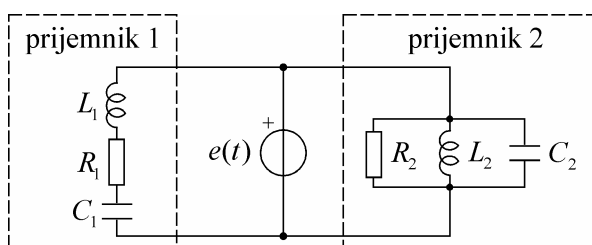
~~U električnom kolu, prikazanom na slici 3.2.1, izračunati~~

~~a) kompleksne impedanse prijemnika,~~

~~b) kompleksne struje prijemnika,~~

~~c) kompleksnu struju i kompleksnu snagu naponskog generatora.~~

~~Brojni podaci su: $R_1 = 10 \Omega$, $L_1 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 100 \mu\text{F}$, $R_2 = 20 \Omega$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_2 = 50 \mu\text{F}$ i $e(t) = 50\sqrt{2} \cos(1000t) \text{ V}$, gde je t izraženo u sekundama.~~



Slika 3.2.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile naponskog generatora iznosi

$$\underline{E} = 50 e^{j0} \text{ V} = 50 \text{ V}.$$

Kompleksne impedanse reaktivnih elemenata su

$$\underline{Z}_{L1} = j20\Omega, \quad \underline{Z}_{C1} = -j10\Omega,$$

$$\underline{Z}_{L2} = j20\Omega, \quad \underline{Z}_{C2} = -j20\Omega.$$

a) Ekvivalentna impedansa prijemnika 1 jednaka je

$$\underline{Z}_{ekv1} = R_1 + \underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{L1} = 10 + j20 - j10 = (10 + j10)\Omega.$$

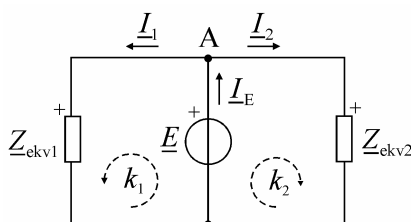
Ekvivalentna impedansa prijemnika 2 određuje se kao

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ekv2}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\underline{Z}_{L2}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C2}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{j20} + \frac{1}{-j20} = \frac{1}{20},$$

i jednaka je

$$\underline{Z}_{ekv2} = 20\Omega.$$

b) Nakon zamene prijemnika odgovarajućim ekvivalentnim impedansama dobija se ekvivalentno kolo prikazano na slici 3.2.2.



Slika 3.2.2. Ekvivalentno kolo.

Kompleksne struje $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ mogu da se odrede iz jednačina napisanih po Drugom Kirhofovom zakonu za konture k_1 i k_2 ,

$$-\underline{E} + \underline{I}_1 \underline{Z}_{ekv1} = 0,$$

$$-\underline{E} + \underline{I}_2 \underline{Z}_{ekv2} = 0.$$

i iznose

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{ekv1}} = \frac{50}{10 + j10} = \frac{5(1-j)}{(1+j)(1-j)} = (2,5 - j2,5) \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{ekv2}} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ A}.$$

c) Kompleksna struja kroz generator dobija se iz jednačine napisane po Prvom Kirhofovom zakonu za čvor A, $-\underline{I}_E + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0$, i iznosi

$$\underline{I}_E = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (5 - j2,5) \text{ A.}$$

Kompleksna snaga naponskog generatora jednaka je

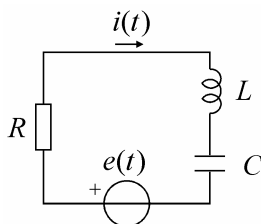
$$\underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}_E^* = 50(5 - j2,5)^* = 50(5 + j2,5) = (250 + j125) \text{ VA.}$$

Zadatak 3.3

U električnom kolu, prikazanom na slici 3.3.1, izračunati

- ekvivalentnu impedansu koju vidi generator,
- kompleksnu struju generatora, kao i njen vremenski oblik,
- aktivnu i reaktivnu snagu generatora,
- aktivnu i reaktivnu snagu otpornika,
- aktivnu i reaktivnu snagu kalema i
- aktivnu i reaktivnu snagu kondenzatora.

Elektromotorna sila naponskog generatora je $e(t) = 40\sqrt{2} \cos(1000t + \pi) \text{ V}$, gde je t izraženo u sekundama. Ostali brojni podaci su: $R = 40 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ i $C = 50 \mu\text{F}$.



Slika 3.3.1. Analizirano kolo.

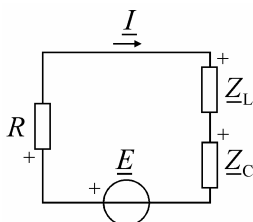
Rešenje.

a) Kružna učestanost je $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Kompleksne impedanse kalema i kondenzatora su

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j1000 \cdot 0,02 = j20 \Omega,$$

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{1000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -j \frac{10^3}{50} = -j20 \Omega.$$

b) Analizirano kolo u kompleksnom domenu prikazano je na slici 3.3.2.



Slika 3.3.2. Analizirano kolo u kompleksnom domenu.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile je

$$\underline{E} = 40e^{j\pi} \text{ V} = (40 \cos \pi + j40 \sin \pi) \text{ V} = -40 \text{ V}.$$

Kompleksna struja $\underline{I}$ može da se odredi iz jednačine napisane po Drugom Kirhofovom zakonu za kolo prikazano na slici 3.3.2. Za smer obilaska u smeru kretanja kazaljke na časovniku dobija se

$$-\underline{E} + R\underline{I} + \underline{Z}_L\underline{I} + \underline{Z}_C\underline{I} = 0.$$

Kompleksna struja u kolu jednaka je

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{-40}{40 + j20 - j20} = \frac{-40}{40} = -1 \text{ A}.$$

Njen eksponencijalni oblik glasi

$$\underline{I} = 1e^{j\pi} \text{ A}.$$

Iz eksponencijalnog oblika može da se pročita da je efektivna vrednost struje jednaka $I = 1 \text{ A}$, a početna faza $\psi = \pi$. Vremenski oblik struje u kolu je

$$i(t) = \sqrt{2} \cos(1000t + \pi) \text{ A}.$$

c) Kompleksna snaga generatora jednaka je

$$\underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}^* = -40 \cdot (-1)^* = -40 \cdot (-1) = 40 \text{ VA}.$$

Realan deo kompleksne snage jednak je aktivnoj snazi,

$$P_E = \text{Re}\{\underline{S}_E\} = 40 \text{ W},$$

dok je imaginaran deo kompleksne snage jednak reaktivnoj snazi,

$$Q_E = \text{Im}\{\underline{S}_E\} = 0 \text{ VAR}.$$

d) Kompleksni napon na otporniku jednak je

$$\underline{U}_R = R\underline{I} = 40 \cdot (-1) = -40 \text{ V}.$$

Kompleksna snaga otpornika jednaka je

$$\underline{S}_R = \underline{U}_R \underline{I}^* = -40 \cdot (-1)^* = 40 \text{ VA.}$$

Kompleksna snaga otpornika je uvek realna i jednaka aktivnoj snazi,

$$P_R = 40 \text{ W.}$$

Reaktivna snaga otpornika uvek je jednaka nuli.

e) Kompleksni napon na kalemu je

$$\underline{U}_L = \underline{Z}_L \underline{I} = j20 \cdot (-1) = -j20 \text{ V.}$$

Kompleksna snaga kalema jednaka je

$$\underline{S}_L = \underline{U}_L \underline{I}^* = -j20 \cdot (-1)^* = j20 \text{ VA.}$$

Reaktivna snaga kalema je uvek pozitivna,

$$Q_L = 20 \text{ VAR,}$$

dok je aktivna snaga kalema uvek jednaka nuli.

f) Kompleksni napon na kondenzatoru je

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = -j20 \cdot (-1) = j20 \text{ V.}$$

Kompleksna snaga kondenzatora jednaka je

$$\underline{S}_C = \underline{U}_C \underline{I}^* = j20 \cdot (-1)^* = -j20 \text{ VA.}$$

Reaktivna snaga kondenzatora je uvek negativna,

$$Q_C = -20 \text{ VAR,}$$

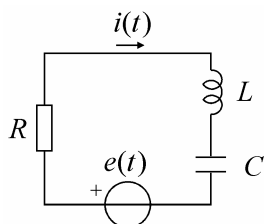
dok je aktivna snaga kondenzatora uvek jednaka nuli.

Zadatak 3.4

U električnom kolu, prikazanom na slici 3.4.1, izračunati

- ekvivalentnu impedansu koju vidi generator,
- aktivnu i reaktivnu snagu generatora,
- aktivnu i reaktivnu snagu otpornika,
- aktivnu i reaktivnu snagu kalema i
- aktivnu i reaktivnu snagu kondenzatora,
- pokazati da je teorema održanja za kompleksne snage zadovoljena.

Elektromotorna sila naponskog generatora je $e(t) = 40\sqrt{2} \cos(2000t) \text{ V}$, gde je t izraženo u sekundama. Ostali brojni podaci su: $R = 40 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ i $C = 50 \mu\text{F}$.



Slika 3.4.1. Analizirano kolo.

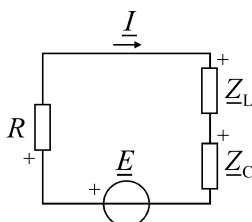
Rešenje.

a) Kružna učestanost je $\omega = 2000 \text{ rad/s}$. Kompleksne impedanse kalemata i kondenzatora su

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j2000 \cdot 0,02 = j40 \Omega,$$

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{2000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = \frac{-j}{0,1} = -j10 \Omega.$$

b) Analizirano kolo u kompleksnom domenu prikazano je na slici 3.4.2.



Slika 3.4.2. Analizirano kolo u kompleksnom domenu.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile je

$$\underline{E} = 40 e^{j0} \text{ V} = 40 \text{ V}.$$

Kompleksna struja $\underline{I}$ može da se odredi iz jednačine napisane po Drugom Kirhofovom zakonu za kolo prikazano na slici 3.4.2. Za smer obilaska u smeru kretanja kazaljke na časovniku dobija se

$$-\underline{E} + R\underline{I} + \underline{Z}_L \underline{I} + \underline{Z}_C \underline{I} = 0.$$

Kompleksna struja u kolu jednaka je

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{40}{40 + j40 - j10} = \frac{4(4 - j3)}{(4 + j3)(4 - j3)} = \frac{16 - j12}{25} = (0,64 - j0,48) \text{ A}.$$

b) Kompleksna snaga generatora jednaka je

$$\underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}^* = 40 \cdot (0,64 - j0,48)^* = 40 \cdot (0,64 + j0,48) = (25,6 + j19,2) \text{ VA}.$$

Realan deo kompleksne snage jednak je aktivnoj snazi, $P_E = 25,6 \text{ W}$, dok je imaginaran deo kompleksne snage jednak reaktivnoj snazi, $Q_E = 19,2 \text{ VAr}$.

c) Kompleksna snaga otpornika jednaka je

$$\underline{S}_R = \underline{U}_R \underline{I}^* = R \underline{I} \underline{I}^* = R I^2 = 40 \cdot (0,64^2 + 0,48^2) = 25,6 \text{ VA}.$$

Kompleksna snaga otpornika je uvek realna i jednaka aktivnoj snazi, $P_R = 25,6 \text{ W}$. Reaktivna snaga otpornika uvek je jednaka nuli.

d) Kompleksna snaga kalema jednaka je

$$\underline{S}_L = \underline{U}_L \underline{I}^* = \underline{Z}_L \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z}_L I^2 = j40 \cdot (0,64^2 + 0,48^2) = j25,6 \text{ VA}.$$

Reaktivna snaga kalema je uvek pozitivna, $Q_L = 25,6 \text{ VAr}$, dok je aktivna snaga kalema uvek jednaka nuli.

e) Kompleksna snaga kondenzatora jednaka je

$$\underline{S}_C = \underline{U}_C \underline{I}^* = \underline{Z}_C \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z}_C I^2 = -j10 \cdot (0,64^2 + 0,48^2) = -j6,4 \text{ VA}.$$

Reaktivna snaga kondenzatora je uvek negativna, $Q_C = -6,4 \text{ VAr}$, dok je aktivna snaga kondenzatora uvek jednaka nuli.

f) Ukupna kompleksna snaga generatora jednaka je

$$\underline{S}_g = \underline{S}_E = (25,6 + j19,2) \text{ VA}.$$

Zbir kompleksnih snaga svih prijemnika jednak je

$$\underline{S}_p = \underline{S}_R + \underline{S}_L + \underline{S}_C = 25,6 + j25,6 - j6,4 = (25,6 + j19,2) \text{ VA}.$$

Ukupna kompleksna snaga generatora jednaka je ukupnoj kompleksnoj snazi prijemnika,

$$\underline{S}_g = \underline{S}_p = (25,6 + j19,2) \text{ VA},$$

čime je pokazano da je teorema održanja za kompleksne snage zadovoljena.

~~Zadatak 3.5~~

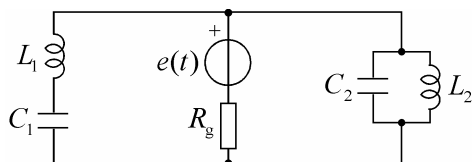
~~U električnom kolu, prikazanom na slici 3.5.1, izračunati~~

~~a) ekvivalentnu impedansu $\underline{Z}_1$ redne veze kalema i kondenzatora,~~

~~b) ekvivalentnu impedansu $\underline{Z}_2$ paralelne veze kalema i kondenzatora,~~

~~c) kompleksnu snagu naponskog generatora.~~

Elektromotorna sila naponskog generatora je $e(t) = 60 \cos(1000t + \pi/4) \text{ V}$, gde je t izraženo u sekundama. Ostali brojni podaci su: $R_g = 20 \Omega$, $L_1 = L_2 = 20 \text{ mH}$ i $C_1 = C_2 = 50 \mu\text{F}$.



Slika 3.5.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

a) Kružna frekvencija je $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Kompleksne impedanse kalema i kondenzatora su

$$\underline{Z}_{L1} = \underline{Z}_{L2} = j\omega L_1 = j1000 \cdot 0,02 = j20\Omega,$$

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \frac{-j}{\omega C_1} = \frac{-j}{1000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -j\frac{10^3}{50} = -j20\Omega.$$

Ekvivalentna impedansa $\underline{Z}_1$ redne veze kalema i kondenzatora u levoj grani jednaka je

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{C1} = j20 - j20 = 0\Omega.$$

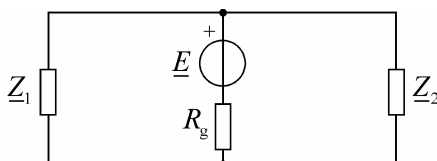
Ekvivalentna impedansa redne veze kalema i kondenzatora jednaka je nuli, iako je svaka pojedinačna impedansa različita od nule. Ova pojava naziva se rezonancija.

b) Ekvivalentna impedansa $\underline{Z}_2$ paralelne veze kalema i kondenzatora u desnoj grani je

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{L2}\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_{C2}} = \frac{j20(-j20)}{j20 - j20} = \infty.$$

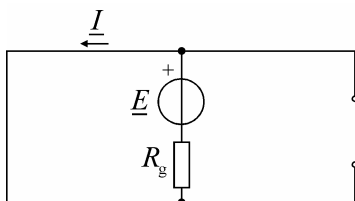
Ekvivalentna impedansa paralelne veze kalema i kondenzatora je beskonačna, iako je svaka pojedinačna impedansa konačna i različita od nule. Ova pojava naziva se antirezonancija.

c) Kada se impedanse grana zamene ekvivalentnim impedansama dobija se kolo prikazano na slici 3.5.2.



Slika 3.5.2. Analizirano kolo u kompleksnom domenu.

Impedansa $\underline{Z}_1 = 0\Omega$ predstavlja kratak spoj, dok impedansa $\underline{Z}_2 = \infty$ predstavlja prekid u kolu. Ekvivalentno kolo prikazano je na slici 3.5.3.



Slika 3.5.3. Ekvivalentno kolo.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile naponskog generatora glasi

$$\underline{E} = \frac{60}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} \text{ V} = (30\sqrt{2} \cos \pi/4 + j30\sqrt{2} \sin \pi/4) \text{ V} = (30 + j30) \text{ V}.$$

Kompleksna struja kroz generator jednaka je

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R_g} = \frac{30 + j30}{20} = (1,5 + j1,5) \text{ A}.$$

Kompleksna snaga generatora iznosi

$$\underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}^* = (30 + j30)(1,5 + j1,5)^* = (30 + j30)(1,5 - j1,5) = 90 \text{ VA}.$$

~~Zadatak 3.6~~

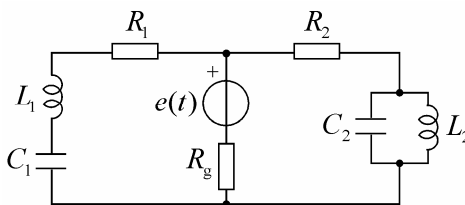
~~U električnom kolu, prikazanom na slici 3.6.1, izračunati~~

~~a) ekvivalentnu impedansu $\underline{Z}_1$ redne veze otpornika, kalema i kondenzatora u levoj grani,~~

~~b) ekvivalentnu impedansu $\underline{Z}_2$ mešovite veze otpornika, kalema i kondenzatora u desnoj grani,~~

~~c) kompleksnu snagu naponskog generatora.~~

Elektromotorna sila naponskog generatora je $e(t) = 100 \cos(1000t - \pi/4) \text{ V}$, gde je t izraženo u sekundama. Ostali brojni podaci su: $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $R_g = 10 \Omega$, $L_1 = L_2 = 20 \text{ mH}$ i $C_1 = C_2 = 50 \mu\text{F}$.



Slika 3.6.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

a) Kružna frekvencija je $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Kompleksne impedanse kalema i kondenzatora su

$$\underline{Z}_{L1} = \underline{Z}_{L2} = j\omega L_1 = j1000 \cdot 0,02 = j20\Omega,$$

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \frac{-j}{\omega C_1} = \frac{-j}{1000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -j\frac{10^3}{50} = -j20\Omega.$$

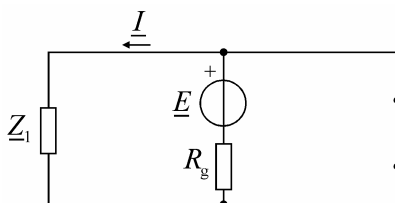
Ekvivalentna impedansa $\underline{Z}_1$ redne veze otpornika, kalema i kondenzatora u levoj grani jednaka je

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{C1} = 10 + j20 - j20 = 10\Omega.$$

b) Ekvivalentna impedansa $\underline{Z}_2$ mešovite veze otpornika, kalema i kondenzatora u desnoj grani je

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{\underline{Z}_{L2}\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_{C2}} = 10 + \frac{j20(-j20)}{j20 - j20} = \infty.$$

c) Kada se impedanse grana zamene ekvivalentnim impedansama dobija se ekvivalentno kolo prikazano na slici 3.6.2.



Slika 3.6.2. Ekvivalentno kolo.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile naponskog generatora glasi

$$\underline{E} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} \text{ V} = 50\sqrt{2} \cos(-\pi/4) + j50\sqrt{2} \sin(-\pi/4) = (50 - j50) \text{ V}.$$

Kompleksna struja kroz generator jednaka je

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R_g + \underline{Z}_1} = \frac{50 - j50}{10 + 10} = \frac{50 - j50}{20} = (2,5 - j2,5) \text{ A}.$$

Kompleksna snaga generatora iznosi

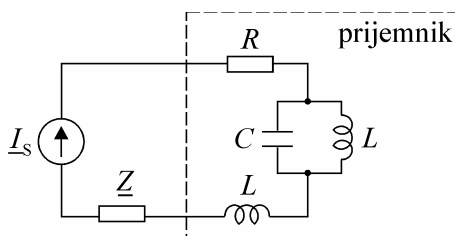
$$\underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}^* = (50 - j50)(2,5 - j2,5)^* = (50 - j50)(2,5 + j2,5) = 250 \text{ VA}.$$

Zadatak 3.7

U električnom kolu, prikazanom na slici 3.7.1, izračunati

- a) kompleksnu impedansu prijemnika $\underline{Z}_p$,
 b) trenutnu vrednost napona na prijemniku i
 c) kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu strujnog generatora.

Brojni podaci su: $\underline{I}_S = 2e^{j\pi/4}$ A, $\underline{Z} = -j30\Omega$, $R = 30\Omega$, $L = 10$ mH, $C = 50\mu$ F i $\omega = 1000$ rad/s.



Slika 3.7.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

- a) Kompleksne impedanse kalema i kondenzatora su

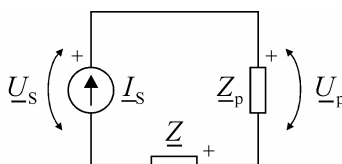
$$\underline{Z}_L = j\omega L = j1000 \cdot 0,01 = j10\Omega,$$

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{1000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -j\frac{10^3}{50} = -j20\Omega.$$

Kompleksna impedansa prijemnika jednaka je

$$\underline{Z}_p = R + \frac{\underline{Z}_C \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} + \underline{Z}_L = (30 + j30)\Omega.$$

- b) Kada se prijemnik zameni ekvivalentnom impedansom $\underline{Z}_p$ dobija se ekvivalentno kolo prikazano na slici 3.7.2.



Slika 3.7.2. Ekvivalentno kolo.

Kompleksni napon na prijemniku (slika 3.7.2) jednak je proizvodu impedanse i struje prijemnika,

$$\underline{U}_p = \underline{Z}_p \underline{I}_S.$$

Kompleksni brojevi mogu da se pomnože ako su ili oba u algebarskom ili oba u eksponencijalnom obliku. Algebarski oblik kompleksnog predstavnika struje strujnog generatora glasi

$$\underline{I}_S = 2 e^{j\pi/4} A = (2 \cos \pi/4 + j 2 \sin \pi/4) A = (\sqrt{2} + j\sqrt{2}) A.$$

Za kompleksni napon na prijemniku dobija se

$$\underline{U}_p = \underline{Z}_p \underline{I}_S = (30 + j30)(\sqrt{2} + j\sqrt{2}) = j60\sqrt{2} V.$$

Eksponencijalni oblik ovog napona je

$$\underline{U}_p = 60\sqrt{2} e^{j\pi/2} V.$$

Iz eksponencijalnog oblika može da se pročita da je efektivna vrednost napona jednaka $60\sqrt{2} V$, a početna faza $\pi/2$. Vremenski oblik napona na prijemniku je

$$u_p(t) = 120 \cos(1000t + \pi/2) V.$$

c) Da bi se odredila kompleksna snaga strujnog generatora potrebno je odrediti kompleksni napon na njemu. Kompleksni napon na strujnom generatoru može da se odredi iz jednačine napisane po Drugom Kirhofovom zakonu za ekvivalentno kolo prikazano na slici 3.7.2. Za smer obilaska u smeru kretanja kazaljke na časovniku dobija se

$$\underline{Z}_p \underline{I}_S + \underline{Z} \underline{I}_S - \underline{U}_S = 0,$$

odakle je napon na strujnom generatoru

$$\underline{U}_S = (\underline{Z}_p + \underline{Z}) \underline{I}_S = (30 + j30 - j30)(\sqrt{2} + j\sqrt{2}) = 30(\sqrt{2} + j\sqrt{2}) V.$$

Kompleksna snaga strujnog generatora jednaka je

$$\underline{S}_S = \underline{U}_S \underline{I}_S^* = 30(\sqrt{2} + j\sqrt{2})(\sqrt{2} + j\sqrt{2})^* = 30 \cdot 4 = 120 VA.$$

Realan deo kompleksne snage jednak je aktivnoj snazi,

$$P_S = \operatorname{Re}\{\underline{S}_S\} = 120 W,$$

dok je imaginaran deo kompleksne snage jednak reaktivnoj snazi,

$$Q_S = \operatorname{Im}\{\underline{S}_S\} = 0 \text{ VAR}.$$

Zadatak 3.8

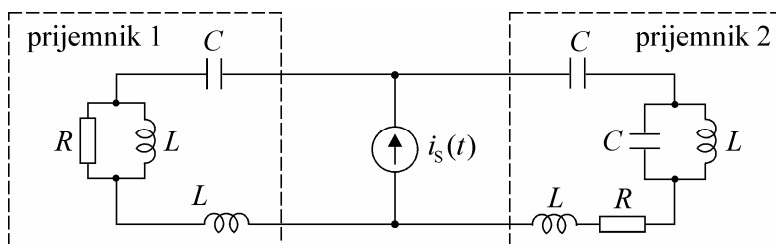
U električnom kolu, prikazanom na slici 3.8.1, izračunati

a) kompleksnu impedansu $\underline{Z}_1$ prijemnika 1,

b) kompleksnu impedansu $\underline{Z}_2$ prijemnika 2,

c) kompleksnu snagu strujnog generatora.

Brojni podaci su: $i_s(t) = 1,7 \cos(2000t + \pi/2) \text{ A}$, gde je t izraženo u sekundama, $R = 20 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ i $C = 50 \mu\text{F}$.



Slika 3.8.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Iz izraza za struju strujnog generatora može da se pročitati da je kružna frekvencija jednaka $\omega = 2000 \text{ rad/s}$. Kompleksne impedanse kalema i kondenzatora su

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j2000 \cdot 0,01 = j20\Omega,$$

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{2000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -j \frac{10^3}{100} = -j10\Omega.$$

a) Ekvivalentna impedansa prijemnika 1 određuje se kao

$$\underline{Z}_1 = \frac{R \underline{Z}_L}{R + \underline{Z}_L} + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L = \frac{20(j20)}{20 + j20} - j10 + j20.$$

Nakon sređivanja dobija se

$$\underline{Z}_1 = \frac{j20}{1+j} + j10 = \frac{j20(1-j)}{(1+j)(1-j)} + j10 = \frac{j20(1-j)}{2} + j10 = (10 + j20)\Omega.$$

b) Ekvivalentna impedansa prijemnika 2 određuje se iz

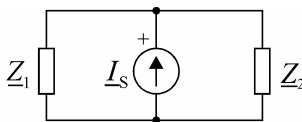
$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} + R + \underline{Z}_L = -j10 + \frac{j20(-j10)}{j20 - j10} + 20 + j20.$$

Nakon sređivanja dobija se

$$\underline{Z}_2 = \frac{j20(-j10)}{j10} + 20 + j10 = -j20 + 20 + j10 = (20 - j10)\Omega.$$

c) Da bi se odredila kompleksna snaga strujnog generatora, potrebno je znati kompleksni napon na njemu.

Nakon zamene prijemnika odgovarajućim ekvivalentnim impedansama dobija se električno kolo prikazano na slici 3.8.2.

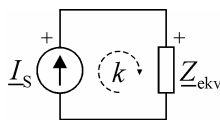


Slika 3.8.2. Analizirano kolo u kompleksnom domenu.

Impedanse $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ vezane su paralelno, jer je napon na njima jednak. Kompleksni napon strujnog generatora može da se odredi tako što se paralelno vezane impedanse $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ zamene ekvivalentnom impedansom,

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(10 + j20)(20 - j10)}{10 + j20 + 20 - j10} = \frac{10(4 + j3)(3 - j)}{(3 + j)(3 - j)} = (15 + j5)\Omega,$$

kao na slici 3.8.3, a zatim odredi napon na toj impedansi.



Slika 3.8.3. Ekvivalentno kolo.

Kompleksni predstavnik struje strujnog generatora glasi

$$\underline{I}_S = \frac{1,7}{\sqrt{2}} e^{j\pi/2} \text{ A} = 1,2 e^{j\pi/2} \text{ A} = (1,2 \cos \pi/2 + j1,2 \sin \pi/2) \text{ A} = j1,2 \text{ A}.$$

Kompleksni napon $\underline{U}_S$ na strujnom generatoru jednak je naponu na ekvivalentnoj impedansi (slika 3.8.3)

$$\underline{U}_S = \underline{Z}_{\text{ekv}} \underline{I}_S = (15 + j5) \cdot j1,2 = (-6 + j18) \text{ V}.$$

Kompleksna snaga strujnog generatora iznosi

$$\underline{S}_S = \underline{U}_S \underline{I}_S^* = (-6 + j18)(j1,2)^* = (-6 + j18)(-j1,2) = (21,6 + j7,2) \text{ VA}.$$

Zadatak 3.9

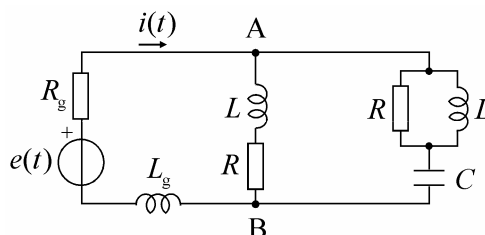
U električnom kolu, prikazanom na slici 3.9.1, odrediti

a) vremenski oblik struje $i(t)$ kroz generator,

b) vremenski oblik napona $u_{AB}(t)$,

c) aktivnu i reaktivnu snagu generatora.

Brojni podaci su: $R_g = 8\Omega$, $L_g = 4\text{mH}$, $R = 20\Omega$, $L = 20\text{mH}$, $C = 50\mu\text{F}$, i $e(t) = 20\sqrt{2}\cos(1000t)\text{V}$, gde je t izraženo u sekundama.



Slika 3.9.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile naponskog generatora iznosi

$$\underline{E} = 20e^{j0}\text{V} = 20\text{V}.$$

Kompleksne impedanse kabela i kondenzatora su $\underline{Z}_L = j20\Omega$, $\underline{Z}_C = -j20\Omega$ i $\underline{Z}_{Lg} = j4\Omega$. Kolo može da se zameni ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 3.9.2.a. Kompleksne impedanse su

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} + \underline{Z}_C = (10 - j10)\Omega,$$

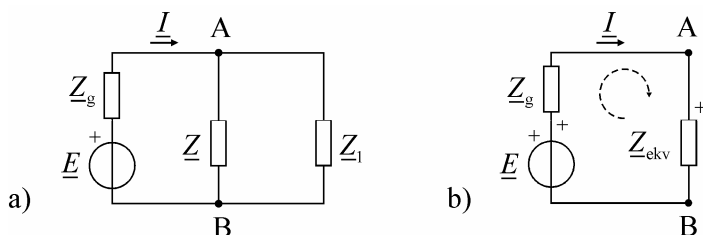
$$\underline{Z}_g = R_g + \underline{Z}_{Lg} = (8 + j4)\Omega,$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = (20 + j20)\Omega.$$

Kompleksni napon $\underline{U}_{AB}$ i kompleksna struja $\underline{I}$ mogu da se odrede rešavanjem kola prikazanog na slici 3.9.2.a, ili određivanjem ekvivalentne impedanse $\underline{Z}_{ekv}$,

$$\underline{Z}_{ekv} = \frac{\underline{Z} \underline{Z}_1}{\underline{Z} + \underline{Z}_1} = (12 - j4)\Omega,$$

i rešavanjem kola prikazanog na slici 3.9.2.b.



Slika 3.9.2. Ekvivalentna kola.

a) Kompleksna struja kroz generator može da se odredi iz jednačine napisane po Drugom Kirhofovom zakonu za ekvivalentno kolo prikazano na slici 3.9.2.b,

$$-E + I Z_g + I Z_{ekv} = 0,$$

odakle se dobija kompleksna struja kroz generator,

$$I = \frac{E}{Z_g + Z_{ekv}} = 1 \text{ A}.$$

Ekspencijalni oblik kompleksne struje kroz generator glasi $I = 1e^{j0} \text{ A}$. Iz ekspencijalnog oblika može da se pročita da je efektivna vrednost struje jednaka 1 A, a početna faza 0. Vremenski oblik struje kroz generator glasi

$$i(t) = 1 \cdot \sqrt{2} \cos(1000t + 0) \text{ A} = \sqrt{2} \cos(1000t) \text{ A}.$$

b) Kompleksni napon $\underline{U}_{AB}$ jednak je

$$\underline{U}_{AB} = I Z_{ekv} = (12 - j4) \text{ V}.$$

Ekspencijalni oblik napona $\underline{U}_{AB}$ glasi

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{12^2 + (-4)^2} e^{j \arctg(-4/12)} = 12,65 e^{-j0,32} \text{ V}.$$

Iz ekspencijalnog oblika napona $\underline{U}_{AB}$ može da se pročita da je efektivna vrednost napona jednaka 12,65 V, a početna faza $-0,32 \text{ rad}$. Vremenski oblik napona $u_{AB}(t)$ je

$$u_{AB}(t) = 12,65 \sqrt{2} \cos(1000t - 0,32) \text{ V}.$$

c) Kompleksna snaga naponskog generatora jednaka je

$$\underline{S}_E = E I^* = 20 \text{ VA}.$$

Aktivna snaga jednaka je realnom delu kompleksne snage,

$$P = 20 \text{ W},$$

dok je reaktivna snaga jednaka imaginarnom delu kompleksne snage,

$$Q = 0 \text{ VAr}.$$

Zadatak 3.10

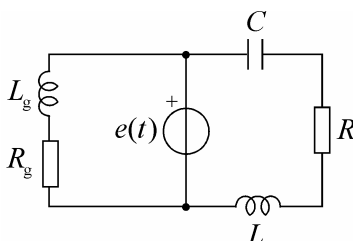
U električnom kolu, prikazanom na slici 3.10.1, odrediti

a) vremenski oblik napona na kondenzatoru,

b) vremenski oblik struje kroz kondenzator,

c) aktivnu i reaktivnu snagu kondenzatora.

Brojni podaci su: $R_g = 40\Omega$, $L_g = 10\text{ mH}$, $R = 20\Omega$, $L = 10\text{ mH}$, $C = 50\mu\text{F}$ i $e(t) = 50\sqrt{2}\cos(2000t + \pi/2)\text{ V}$, gde je t izraženo u sekundama.



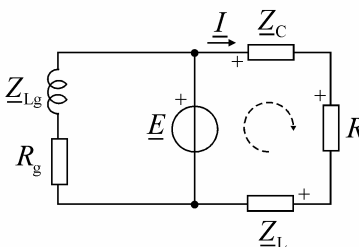
Slika 3.10.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Kompleksni predstavnik elektromotorne sile naponskog generatora je

$$\underline{E} = 50e^{j\pi/2}\text{ V} = j50\text{ V}.$$

Kompleksne impedanse reaktivnih elemenata su $\underline{Z}_L = \underline{Z}_{L_g} = j20\Omega$ i $\underline{Z}_C = -j10\Omega$. Analizirano kolo u kompleksnom domenu prikazano je na slici 3.10.2.



Slika 3.10.2. Analizirano kolo u kompleksnom domenu.

Kompleksna jačina struje kroz kondenzator može da se odredi iz jednačine napisane po Drugom Kirhofovom zakonu za konturu označenu na slici 3.10.2. Za smer obilaska u smeru kretanja kazaljke na časovniku, ta jednačina glasi

$$-\underline{E} + \underline{Z}_C \underline{I} + R \underline{I} + \underline{Z}_L \underline{I} = 0.$$

Iz prethodne jednačine dobija se kompleksna struja kroz kondenzator,

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{j50}{20 + j20 - j10} = \frac{j5(2 - j)}{(2 + j)(2 - j)} = (1 + j2) \text{ A.}$$

Kompleksni napon na kondenzatoru jednak je

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = -j10(1 + j2) = (20 - j10) \text{ V.}$$

U prethodna dva izraza kompleksni predstavnici struje i napona kondenzatora su u algebarskom obliku. Njihovi eksponencijalni oblici glase

$$\underline{I} = \sqrt{1^2 + 2^2} e^{j \arctg 2/1} = \sqrt{5} e^{j1,11} \text{ A,}$$

$$\underline{U}_C = \sqrt{20^2 + (-10)^2} e^{j \arctg(-10/20)} = 10\sqrt{5} e^{-j0,46} \text{ V.}$$

a) Vremenski oblik napona na kondenzatoru je

$$u_C(t) = 10\sqrt{5}\sqrt{2} \cos(2000t - 0,46) \text{ V.}$$

b) Vremenski oblik struje kondenzatora je

$$i(t) = \sqrt{5}\sqrt{2} \cos(2000t + 1,11) \text{ V.}$$

Fazna razlika napona i struje kondenzatora jednaka je $-\pi/2 = -1,57$.

c) Kompleksna snaga kondenzatora je čisto imaginarna,

$$\underline{S}_C = \underline{U}_C \underline{I}^* = (20 - j10)(1 + j2)^* = (20 - j10)(1 - j2) = -j50 \text{ VA.}$$

Aktivna snaga kondenzatora jednaka je nuli, dok je reaktivna snaga $Q_C = -50 \text{ VAr}$.

~~Zadatak 3.11~~

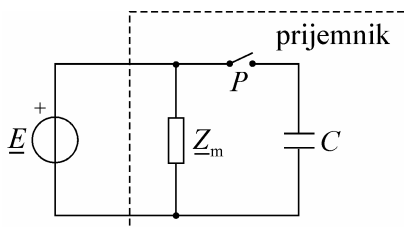
~~U električnom kolu, prikazanom na slici 3.11.1, izračunati aktivnu i reaktivnu snagu generatora, kao i faktor snage kada je~~

~~a) prekidač P otvoren,~~

~~b) prekidač P zatvoren.~~

~~c) Nacrtati fazorski dijagram cele grupe kada je prekidač zatvoren.~~

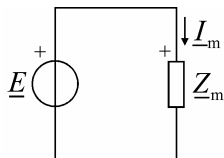
Brojni podaci su: $\underline{E} = 100 \text{ V}$, $\underline{Z}_m = 6 + j2 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$ i $\omega = 1000 \text{ rad/s}$.



Slika 3.11.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

a) Ekvivalentno kolo, kada je prekidač otvoren, prikazano je na slici 3.11.2.



Slika 3.11.2. Ekvivalentno kolo kada je prekidač otvoren.

Kompleksna struja kroz generator i impedansu $\underline{Z}_m$ jednaka je količniku

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_m} = \frac{100}{6 + j2} = (15 - j5) \text{ A.}$$

Kompleksna snaga naponskog generatora kada je prekidač otvoren je

$$\underline{S} = \underline{E} \underline{I}_m^* = 100 \cdot (15 - j5)^* = 100 \cdot (15 + j5) = (1500 + j500) \text{ VA.}$$

Aktivna i reaktivna snaga generatora su

$$P = 1500 \text{ W,} \quad Q = 500 \text{ VAr.}$$

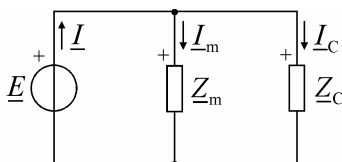
Prividna snaga jednaka je

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1500^2 + 500^2} = 500\sqrt{10} \text{ VA.}$$

Faktor snage kada je prekidač otvoren iznosi

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1500}{500\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,95.$$

b) Ekvivalentno kolo, kada je prekidač zatvoren, prikazano je na slici 3.11.3.



Slika 3.11.3. Ekvivalentno kolo kada je prekidač zatvoren.

Kompleksna struja kroz kondenzator impedanse $\underline{Z}_C = -j20 \Omega$ iznosi

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_C} = \frac{100}{-j20} = j5 \text{ A.}$$

Kompleksna struja kroz generator dobija se iz Prvog Kirhofovog zakona,

$$\underline{I} = \underline{I}_m + \underline{I}_C = (15 - j5) + j5 = 15 \text{ A.}$$

Kompleksna snaga naponskog generatora kada je prekidač zatvoren je

$$\underline{S} = \underline{E} \underline{I}_m^* = 100 \cdot 15 = 1500 \text{ VA.}$$

Aktivna i reaktivna snaga generatora su

$$P = 1500 \text{ W}, \quad Q = 0 \text{ VAr.}$$

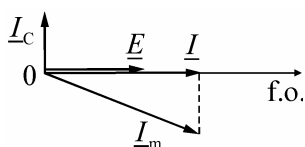
S obzirom da je reaktivna snaga jednaka nuli, prividna snaga jednaka je aktivnoj,

$$S = 1500 \text{ VA.}$$

Faktor snage iznosi

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = 1.$$

c) U zadatku je opisana popravka faktora snage prijemnika impedanse $\underline{Z}_m$. Faktor snage induktivnog prijemnika (motora) može da se popravi tako što se paralelno sa njim veže kondenzator, kao na slici 3.11.3. Fazorski dijagram je prikazan na slici 3.11.4.



Slika 3.11.4. Fazorski dijagram popravke faktora snage induktivnog prijemnika.