

Vremenski konstantne struje (VKS)

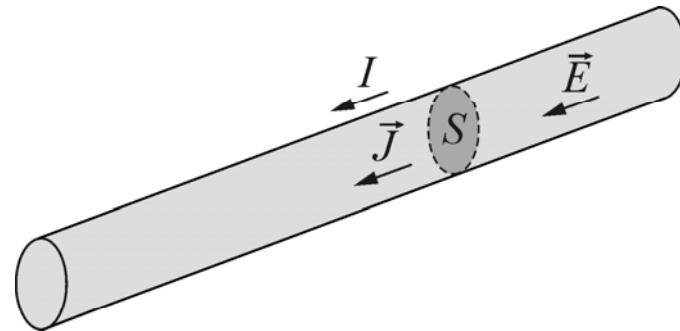
Električna struja

- organizovano kretanje naelektrisanja,
 - u čvrstim telima, tečnostima, gasovima i vakuumu.
- Jačina (intenzitet) struje
 - mera brzine usmerenog kretanja naelektrisanja,

$$I = \frac{Q}{t} \quad [\text{A}].$$

- Gustina struje:

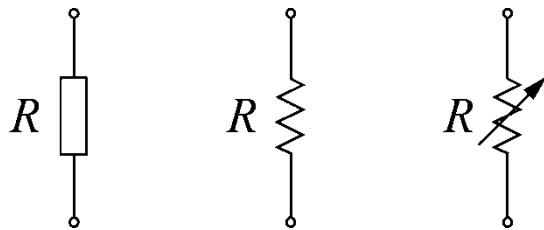
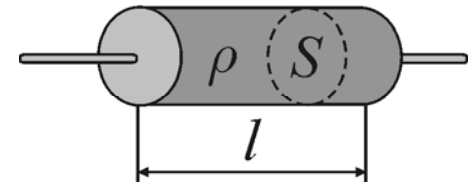
$$J = \frac{I}{S} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right].$$



Otpornost / 1

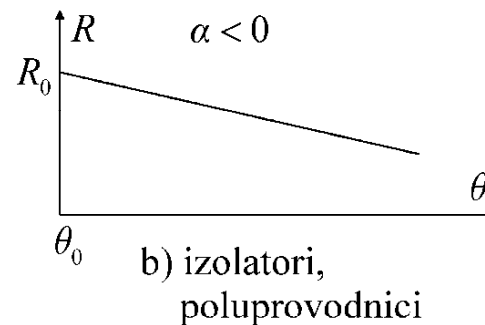
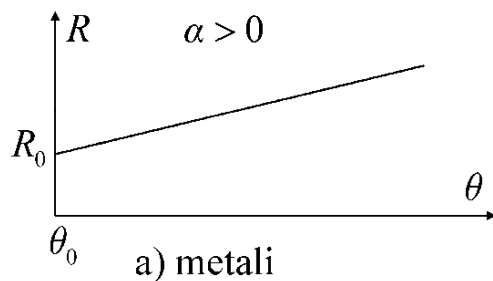
- je mera suprotstavlja el. struji (provodnici imaju malu otpornost, izolatori veliku).
- Otpornost R [Ω] zavisi od
 - dimenzija l i S ,
 - specifične otpornosti materijala: ρ [Ωm]
- Provodnost $G = 1/R$ [S]
 - specifična provodnost: $\sigma = 1/\rho$ [S/m]
- Otpornik je komponenta
 - dizajnirana da ima poznatu vrednost otpornosti

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



Otpornost / 2

- Promena otpornosti sa temperaturom
 - najčešće nepoželjna, koristi se za konstrukciju nekih termometara.

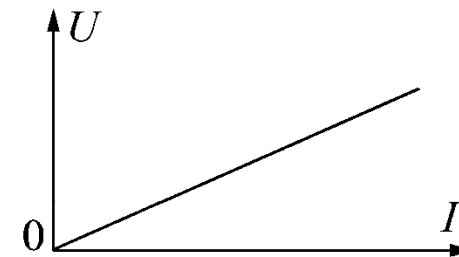
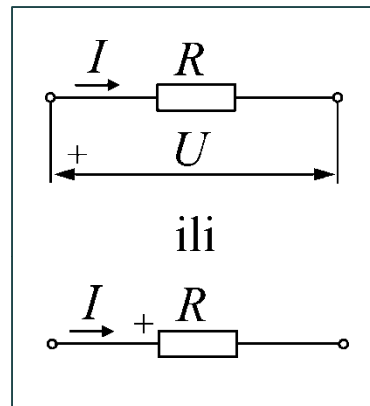


- Superprovodnici: $\rho = 0$
 - olovo, živa, neke legure pri temperaturama bliskim apsolutnoj nuli,
 - koriste se za izradu jakih elektromagneta (skeneri, vozovi).
- Savršeni provodnici: $\rho = 0$ (pa je i $R = 0$)
 - smatra se da su provodnici koji povezuju elemente u električnim kolima izrađeni od savršenog provodnika.

Omov zakon, Džulov zakon

- Omov zakon

$$U = RI$$

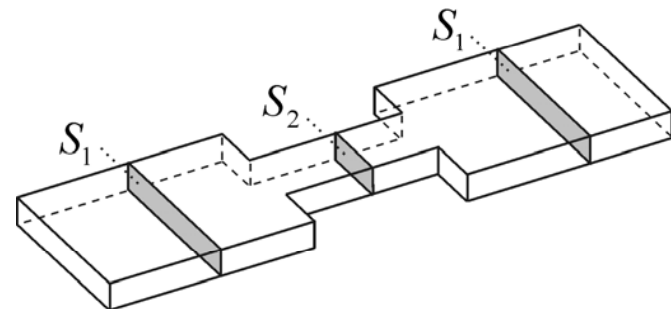


- Džulov zakon

$$W = I^2 R t$$

$$W = I^2 R t = U I t = \frac{U^2 t}{R}$$

- zagrevanje provodnika (najčešće nepoželjno)
koristi se: kod električnih grejača, sijalica sa
užarenim vlaknom, topljivog osigurača.



Snaga otpornika

- Snaga je brzina kojom se vrši rad: $P = \frac{W}{t}$
- Snaga disipirana na otporniku (snaga Džulovih gubitaka):

$$P = I^2 R = UI = \frac{U^2}{R} \quad [\text{W}]$$

- grejna tela ili sijalice upoređujemo prema njihovoj snazi,
 - ova tela se u električnom kolu analiziraju kao otpornici.
- kWh (električno brojilo meri utrošenu električnu energiju u kWh)
 - energija u kWh: snagu izraženu u kW potrebno je pomnožiti sa vremenom izraženim u časovima (h).

Primer: grejač od 3 kW koristi se 12 sati.

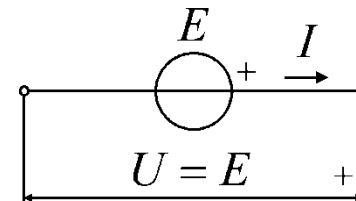
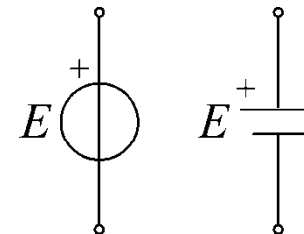
$$W = Pt = 3 \text{ kW} \cdot 12 \text{ h} = 36 \text{ kWh}.$$

Veza između kWh i džula:

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}.$$

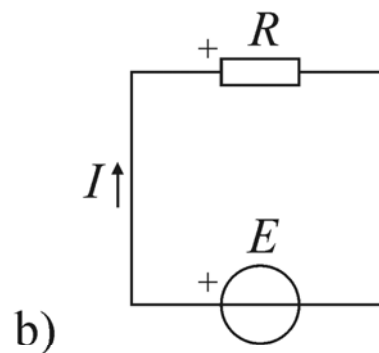
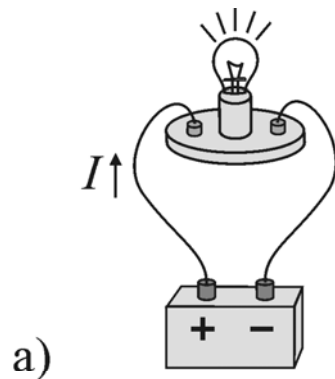
Generator

- pretvara neki drugi vid energije u električnu.
- Naponski generator u električnom kolu opisuje se sa
 - elektromotornom silom E [V] (skraćenica ems),
 - unutrašnjom otpornošću R_g .
- Idealan naponski generator
 - $R_g = 0$, $U = E$ (U ne zavisi od struje)
- Snaga generatora
 - može biti pozitivna, negativna ili nula,
 - za usaglašene smerove: $P_E = EI$,
 - ako smerovi nisu usaglašeni: $P_E = -EI$.



Prosto električno kolo

- Baterijska lampa,
 - sastoji se od baterije, sijalice i provodnika koji ih povezuju.
- Električna šema,
 - elementi su predstavljeni grafičkim simbolom: sijalica kao otpornik, baterija kao generator,
 - nema grananja (jačina struje je ista kroz sve elemente),
 - provodnici koji povezuju elemente su savršeni i njihov oblik i dužina nisu važni, zato je napon na sijalici jednak naponu baterije.



Prosto električno kolo - primer

- Sijalica je priključena na bateriju elektromotorne sile 3 V.
Jačina struje kroz sijalico je 0,2 A. Odrediti
 - a) otpornost sijalice,
 - b) snagu sijalice,
 - c) snagu baterije.

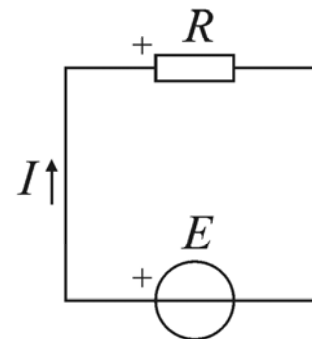
Rešenje.

a) Napon na sijalici: $U = E = 3 \text{ V}$.

Iz Omovog zakona: $R = \frac{U}{I} = \frac{3}{0,2} = 15 \Omega$.

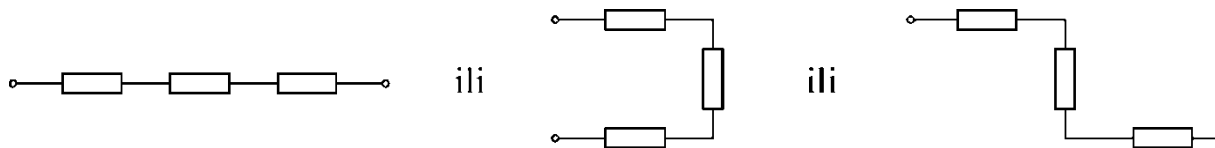
b) $P_R = RI^2 = 15 \cdot (0,2)^2 = 0,6 \text{ W}$.

c) $P_E = EI = 3 \cdot 0,2 = 0,6 \text{ W}$.

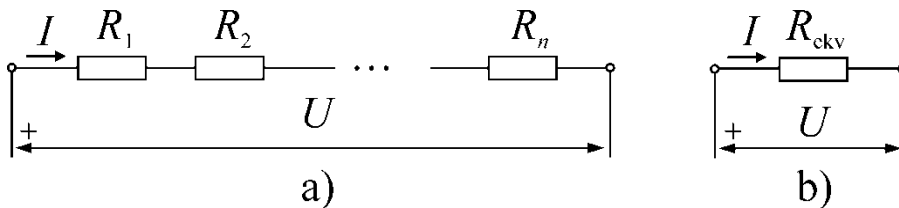


Veze elemenata - redna veza

- STRUJA kroz sve elemente je ista (nema grananja)



- a) redna veza n otpornika, b) ekvivalentni otpornik



- Snaga Džulovih gubitaka

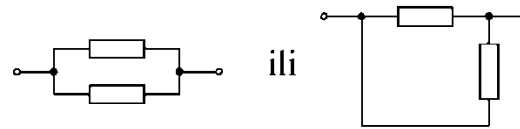
$$R_{\text{ekv}} I^2 = R_1 I^2 + R_2 I^2 + \dots + R_n I^2 \quad | : I^2$$

Ekvivalentna otpornost

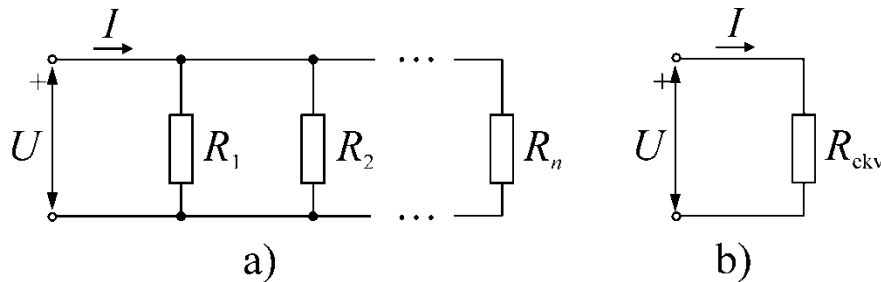
$$R_{\text{ekv}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Veze elemenata - paralelna veza

- NAPON na svim elementima je isti



- a) paralelna veza n otpornika, b) ekvivalentni otpornik



$$\frac{U^2}{R_{ekv}} = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} + \dots + \frac{U^2}{R_n} \quad | : U^2$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

u terminima provodnosti

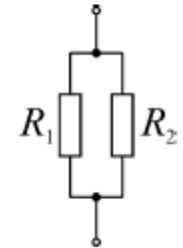
$$G_{ekv} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

Paralelna veza dva otpornika

$$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$\boxed{R_{ekv} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

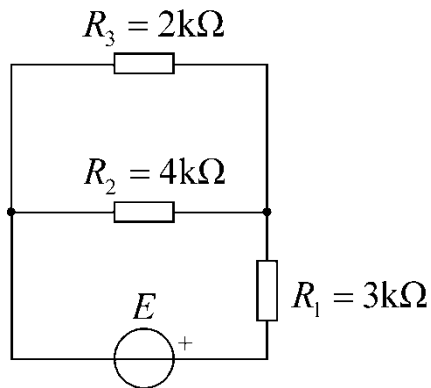


Primer: $R_1 = 6\Omega$ i $R_2 = 3\Omega$

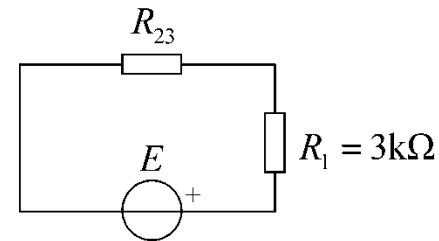
$$R_{ekv} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

Veze elemenata - mešovita veza

- veza u kojoj kao delovi postoje i redne i paralelne veze,
- ekvivalentna otpornost određuje se postepenim zamenjivanjem rednih i paralelnih veza.
- Primer:
 - Odrediti ekvivalentnu otpornost koju “vidi” generator.

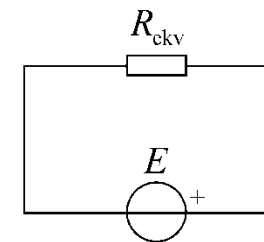


1 korak:



$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{4\text{k}\Omega \cdot 2\text{k}\Omega}{(4 + 2)\text{k}\Omega} = 1,33\text{k}\Omega$$

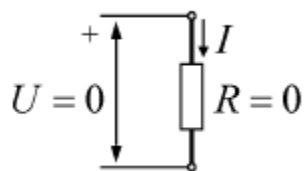
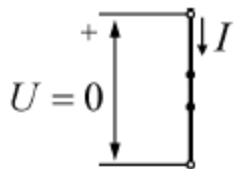
2 korak:



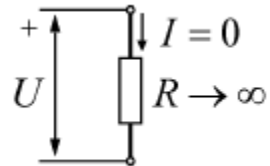
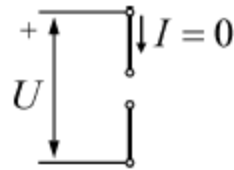
$$R_{\text{ekv}} = R_{23} + R_1 = 4,33\text{k}\Omega$$

...još neki elementi

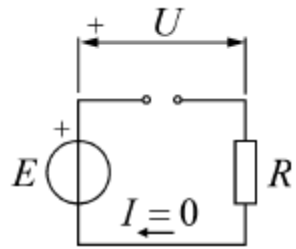
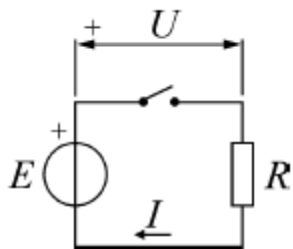
kratak spoj



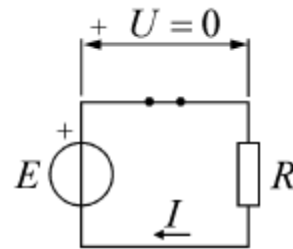
otvorena veza



- prekidač: kolo se rešava posebno za svaki položaj prekidača



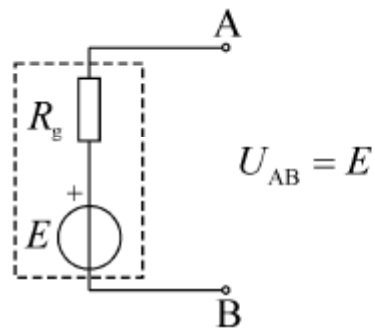
prekidač otvoren
 $I = 0, U = E$



prekidač zatvoren
 $U = 0, I = E/R$

Realan naponski generator

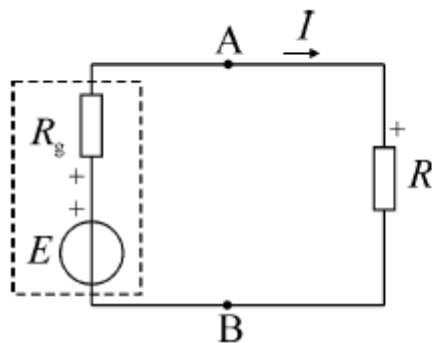
- modeluje se kao redna veza idealnog naponskog generatora i otpornosti R_g .
- Sa otvorenim krajevima



$$I = 0$$

$$U_{Rg} = 0$$

- Priključen na potrošač



$$EI = R_g I^2 + RI^2 \quad / : I$$

$$E = R_g I + RI$$

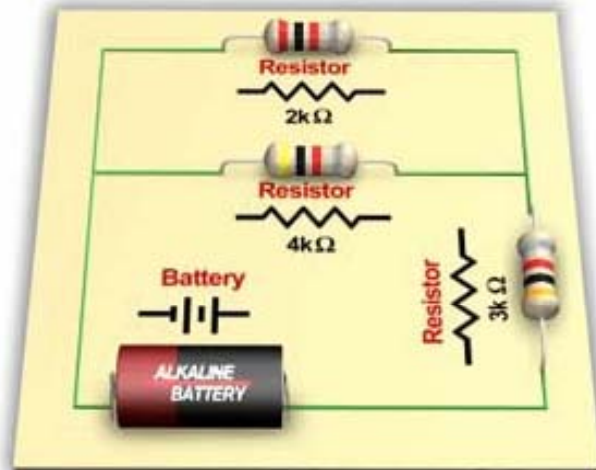
$$RI = E - R_g I.$$

$$\text{Omov zakon } U_{AB} = RI$$

$$\boxed{U_{AB} = E - R_g I}$$

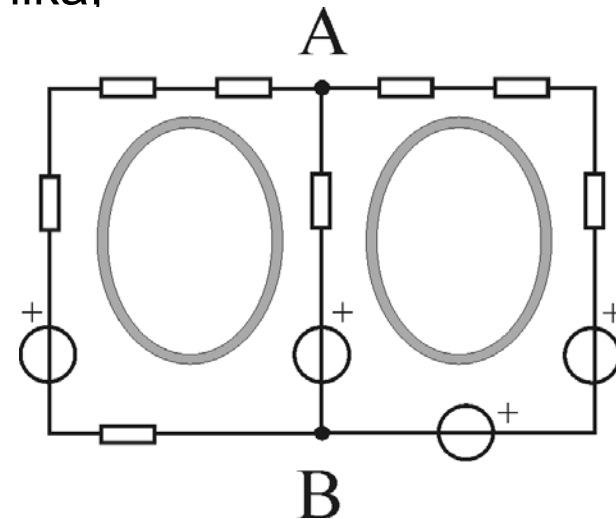
Električna kola VKS/ 1

- sastoje se od
 - jednog ili više generatora,
 - jednog ili više potrošača (potrošač se modeluje kao otpornost),
 - provodnika koji povezuju elemente
(provodnici su savršeni - napon između dve tačke na provodniku jednak je nuli).



Električna kola VKS / 2

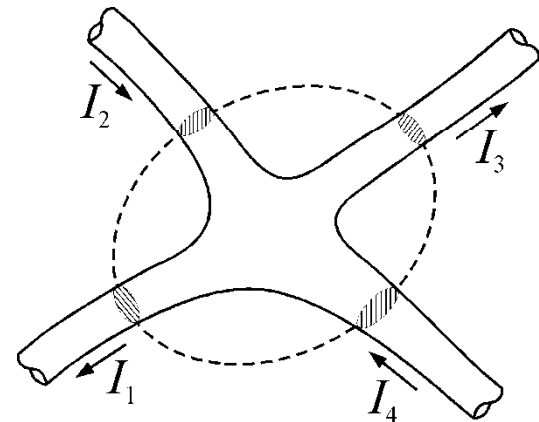
- Čvor je tačka spajanja tri ili više provodnika,
 - kolo na slici ima dva čvora: A i B,
 - označavaju se punim kružićima.
- Grana je deo kola koji neposredno spaja dva čvora,
 - kolo na slici ima tri grane,
 - struja u jednoj grani je konstantna,
 - broj struja u kolu jednak je broju grana.
- Grane kola obrazuju zatvorene putanje koje se nazivaju konture,
 - na slici su označene dve konture (kolo ima tri konture).
- Kirhofovi zakoni: $\text{IKZ: } \sum I = 0$ $\text{IIKZ: } \sum U = 0$



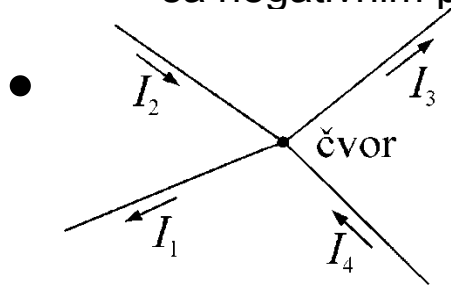
I KZ / 1

- I KZ: algebarski zbir jačina struja svih grana koje se spajaju u čvoru jednak je nuli,

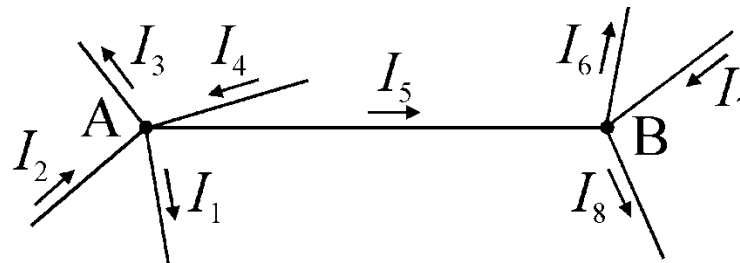
$$\sum I = 0$$



- po dogovoru, jačina struje ulazi u zbir sa pozitivnim predznakom ako struja izlazi iz čvora, sa negativnim predznakom ako struja ulazi u čvor.



$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$



II KZ / 1

- Primer:

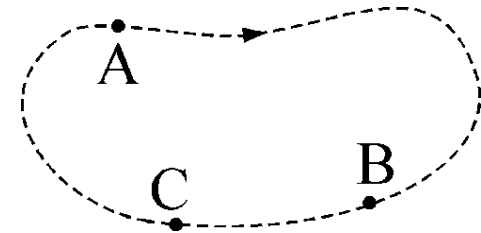
Za označen smer obilaska

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_A = 0$$

Za obrnut smer obilaska

$$U_{AC} + U_{CB} + U_{BA} = 0 \text{ (prethodne jednačina pomnožena sa } -1 \text{)}$$

- smer obilaska konture i polazna tačka mogu se proizvoljno izabrati.

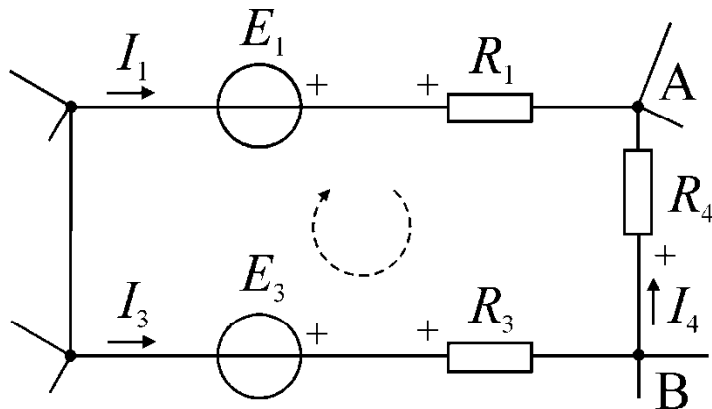


- II KZ: algebarski zbir napona duž zatvorene konture jednak je nuli

$$\sum U = 0$$

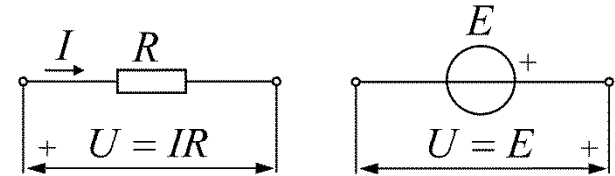
- smer obilaska konture i polazna tačka mogu se proizvoljno izabrati,
- po dogovoru: ako se prilikom obilaska konture prvo naiđe na kraj elementa označen sa +, napon na tom elementu ulazi u zbir sa pozitivnim predznakom, u suprotnom napon na tom elementu ulazi u zbir sa negativnim predznakom.

II KZ / 2



(II KZ) $-R_4 I_4 - R_3 I_3 + E_3 - E_1 + R_1 I_1 = 0$

Podsetnik



- Napon između dve tačke
 - algebarski zbir napona duž proizvoljnog puta od prve do druge tačke
 - pravilo o ili $U_{AB} = -R_4 I_4$
 ili $U_{AB} = -R_1 I_1 + E_1 - E_3 + R_3 I_3$

Analiza električnih kola

- Rešavanje kola: određivanje struja grana i napona grana.
- Neka je $n_{\check{c}}$ broj čvorova i n_g broj grana kola:
 - broj linearno nezavisnih jednačina po I KZ: $(n_{\check{c}} - 1)$,
 - broj linearno nezavisnih jednačina po II KZ: $n_g - (n_{\check{c}} - 1)$,
 - ukupan broj linearno nezavisnih jednačina: n_g ,
 - to je dovoljno jednačina da se odredi jedna nepoznata po grani (npr. da se odrede struje svih grana).
- U složenom kolu nije moguće unapred znati stvarne smerove struja u svim granama,
 - pre rešavanja kola potrebno je pretpostaviti smerove struja u svim granama,
 - kao rezultat mogu se dobiti i pozitivne i negativne vrednosti struja.

Primer / 1

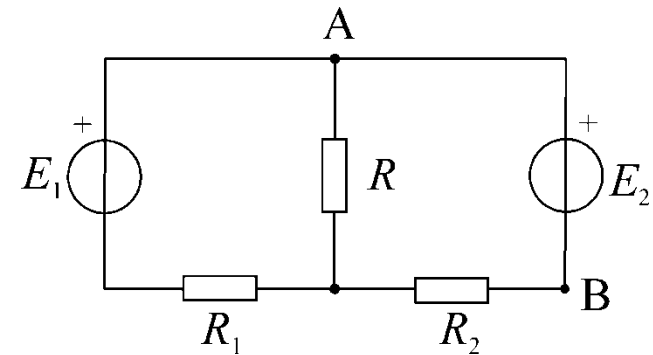
- **ZADATAK**

U kolu na slici odrediti

- a) jačine struja u svima granama,
 - b) snage generatora,
 - c) snage otpornika,
 - d) napon U_{AB} ,
 - e) proveriti teoremu održanja snage za ovo kolo.
- Brojni podaci:

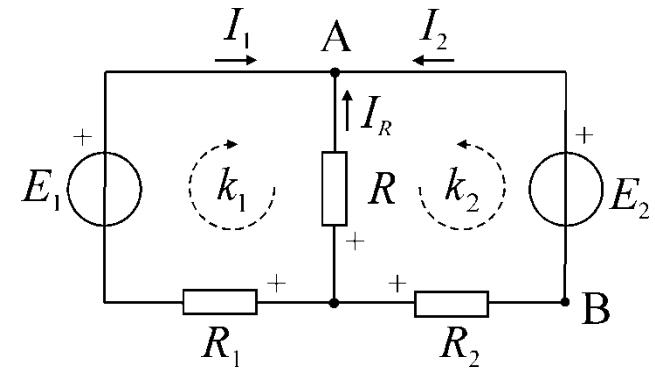
$$E_1 = 30 \text{ V}, E_2 = 25 \text{ V}, R_1 = 200 \Omega, R_2 = 50 \Omega, R = 25 \Omega.$$

- $n_{\check{c}} = 2, n_g = 3,$
 - broj jednačina po I KZ: $(n_{\check{c}} - 1) = 1,$
 - broj jednačina po II KZ: $n_g - (n_{\check{c}} - 1) = 3 - 1 = 2,$
 - ukupan broj jednačina : $n_g = 3.$



Primer / 2

- pretpostavite smerove struja u svim granama (po jedna struja u svakoj grani),
- označite + na svim otpornicima,
- odaberite dve konture i njihove orijentacije.



- **Jednačine**

$$\begin{aligned}\text{I KZ (čvor A):} \quad & -I_1 - I_R - I_2 = 0, \\ \text{II KZ: kontura } k_1 : \quad & -RI_R + R_1I_1 - E_1 = 0, \\ \text{II KZ: kontura } k_2 : \quad & -RI_R + R_2I_2 - E_2 = 0.\end{aligned}$$

Poznate veličine (E_1 i E_2) mogu preći na drugu stranu jednačina:

$$-I_1 - I_2 - I_R = 0, \quad (1)$$

$$-RI_R + R_1I_1 = E_1, \quad (2)$$

$$-RI_R + R_2I_2 = E_2. \quad (3)$$

Primer / 3

$$-I_1 - I_2 - I_R = 0, \quad (1)$$

$$-RI_R + R_1 I_1 = E_1, \quad (2)$$

$$-RI_R + R_2 I_2 = E_2. \quad (3)$$

- iz (1) izraziti jednu struju (npr. I_R) i uvrstiti u (2) i (3),

$$I_R = -I_1 - I_2, \quad (1)$$

$$-R(-I_1 - I_2) + R_1 I_1 = E_1, \quad (2)$$

$$-R(-I_1 - I_2) + R_2 I_2 = E_2. \quad (3)$$

- grupisati,

$$I_R = -I_1 - I_2, \quad (1)$$

$$(R_1 + R)I_1 + RI_2 = E_1, \quad (2)$$

$$RI_1 + (R_2 + R)I_2 = E_2. \quad (3)$$

- uvrstiti brojne vrednosti,

$$I_R = -I_1 - I_2, \quad (1)$$

$$225I_1 + 25I_2 = 30, \quad (2)$$

$$25I_1 + 75I_2 = 25. \quad (3)$$

- rešiti (2) i (3)

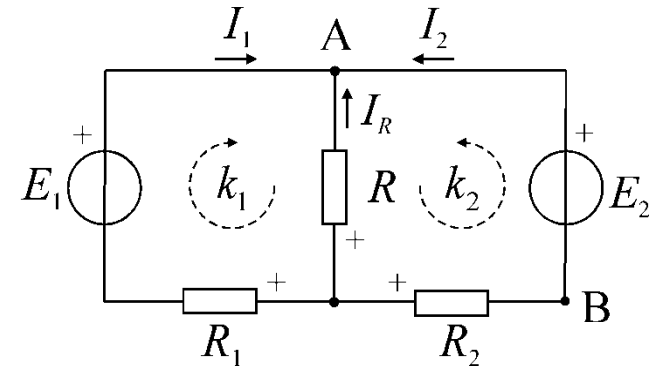
$$I_1 = 0,1 \text{ A} \quad I_2 = 0,3 \text{ A}$$

- a onda iz (1)

$$I_R = -0,4 \text{ A.}$$

Primer / 4

$$\begin{aligned} \text{a) } I_1 &= 0,1 \text{ A} \\ I_2 &= 0,3 \text{ A} \\ I_R &= -0,4 \text{ A} \end{aligned}$$



b) Snage generatora:

$$P_{E1} = E_1 I_1 = 30 \text{ V} \cdot 0,1 \text{ A} = 3 \text{ W},$$

$$P_{E2} = E_2 I_2 = 25 \text{ V} \cdot 0,3 \text{ A} = 7,5 \text{ W}.$$

c) Snage otpornika:

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 200 \cdot (0,1)^2 = 2 \text{ W},$$

$$P_{R2} = R_2 I_2^2 = 50 \cdot (0,3)^2 = 4,5 \text{ W},$$

$$P_R = R I_R^2 = 25 \cdot (-0,4)^2 = 4 \text{ W}.$$

d) U_{AB} se može odrediti duž tri putanje:

$$\text{ili } U_{AB} = E_2 = 25 \text{ V},$$

$$\text{ili } U_{AB} = -R I_R + R_2 I_2 = -25 \cdot (-0,4) + 50 \cdot 0,3 = 10 \text{ V} + 15 \text{ V} = 25 \text{ V},$$

$$\text{ili } U_{AB} = E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 30 - 200 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0,3 = 25 \text{ V}.$$

e) Ukupna snaga generatora i ukupna snaga
Džulovih gubitaka su jednake, čime je teorema
održanja snage proverena za ovo kolo.

$$P_{\text{gen}} = P_{E1} + P_{E2} = 10,5 \text{ W},$$

$$P_J = P_{R1} + P_{R2} + P_R = 10,5 \text{ W},$$

$$P_{\text{gen}} = P_J = 10,5 \text{ W}.$$

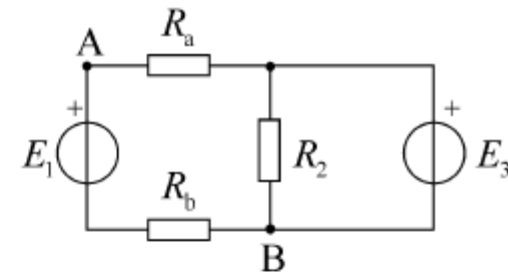
Primer kolokvijuma / 1

Zadaci:

1. U električnom kolu prikazanom na slici 1 izračunati

- jačine struja u svim granama kola,
- snage generatora,
- snage Džulovih gubitaka svih otpornika u kolu,
- pokazati da je teorema održanja snage zadovoljena,
- napon U_{AB} .

Brojni podaci su: $E_1 = 10\text{ V}$, $E_3 = 20\text{ V}$, $R_a = R_b = 5\ \Omega$ i $R_2 = 50\ \Omega$.

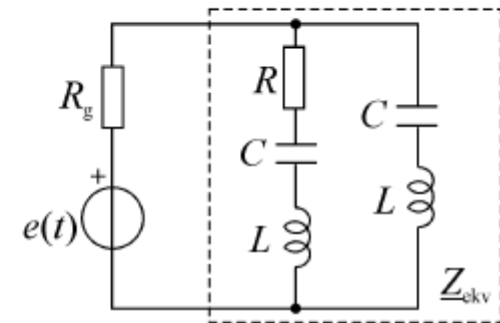


slika 1

2. U kolu prikazanom na slici 2 odrediti:

- ekvivalentnu kompleksnu impedansu prijemnika Z_{ekv} ,
- kompleksni predstavnik elektromotorne sile generatora,
- kompleksnu struju kroz generator,
- kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu generatora,
- kompleksni napon na prijemniku.

Brojni podaci su $C = 50\ \mu\text{F}$, $L = 20\text{ mH}$, $R = 20\ \Omega$, $R_g = 10\ \Omega$,
 $e(t) = 10\sqrt{2} \cos(1000t + \pi)\text{ V}$.



slika 2

Primer kolokvijuma / 2

- Kolokvijum se sastoji
 - od dva zadatka koji nose po 25 poena i
 - pet “teorijskih pitanja ili kratkih zadataka” koji nose po 10 poena,
 - ukupno 100 poena.

Teorijska pitanja i kratki zadaci:

1. Kondenzator je napravljen od dve paralelne provodne ploče dimenzija 3cm sa 2cm, na rastojanju 0,5mm. Između ploča je sloj dielektrika relativne permitivnosti 5,8. Kondenzator je priključen na napon od 200V.

- a) Nacrtati sliku pločastog kondenzatora i označiti sve relevantne veličine.
- b) Odrediti kapacitivnost kondenzatora (permitivnost vakuumu je $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).
- c) Odrediti naelektrisanje na pločama kondenzatora.
- d) Odrediti jačinu električnog polja u prostoru između ploča.
- e) Odrediti energiju sadržanu u kondenzatoru.

2. Izračunati potrebnu dužinu žice poluprečnika 0,5mm da bi se napravio otpornik otpornosti 100Ω ako je

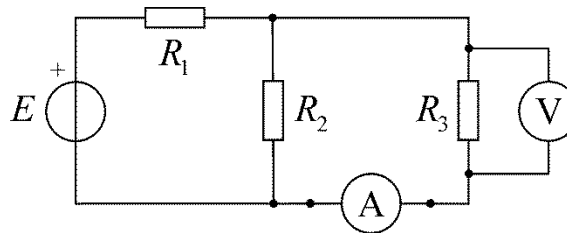
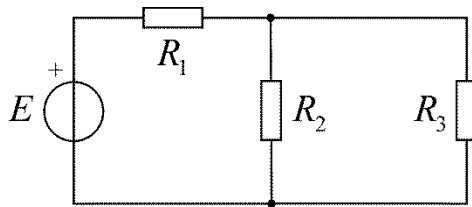
- a) žica od bakra ($\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$),
- b) žica od grafitu ($\rho_{\text{grafit}} = 3,5 \cdot 10^{-5} \Omega\text{m}$).

Ampermetar, voltmetar, ommetar

- Ampermetar



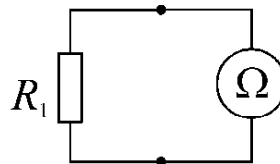
- provodnik se prvo prekine
- nakon toga se spoji preko ampermetra
- otpornost idealnog ampermetra je jednaka nuli i na njemu nema napona
- merenje struje kroz R_3



- Ommetar



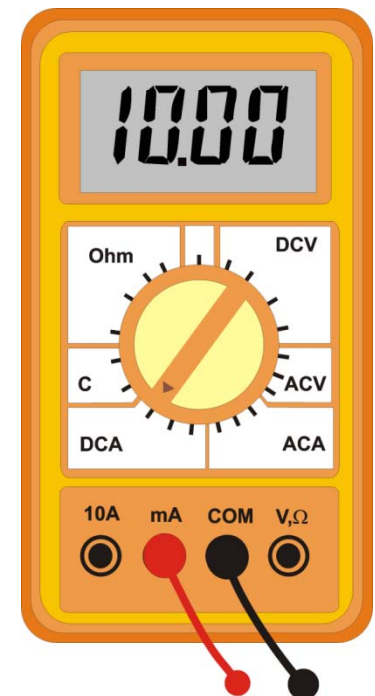
- vezuje se paralelno sa otpornikom



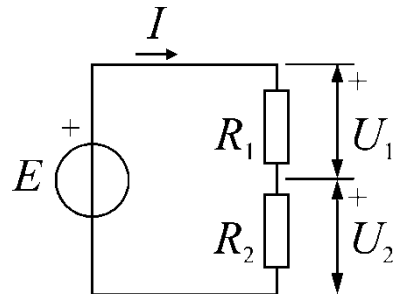
- Voltmetar



- priključci voltmetra se vezuju za tačke između kojih se meri napon
- otpornost idealnog voltmetra je beskonačna i kroz njega nema struje
- merenje napona na R_3



Naponski razdelnik



- Otpornici dele napon:

$$E = U_1 + U_2$$

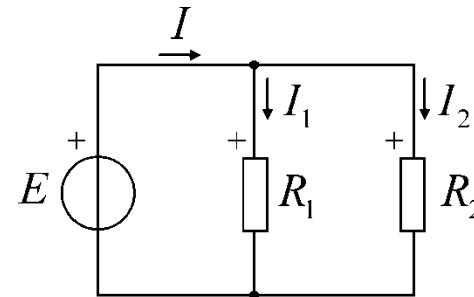
$$U_1 = R_1 I$$

$$U_2 = R_2 I$$

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

- primena: dobijanje više različitih naponskih nivoa iz istog izvora

Strujni razdelnik



- Otpornici dele struju:

$$I = I_1 + I_2$$

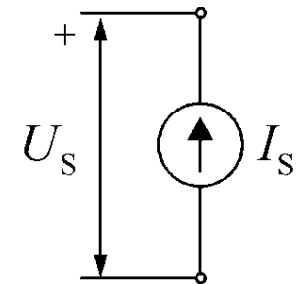
$$R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

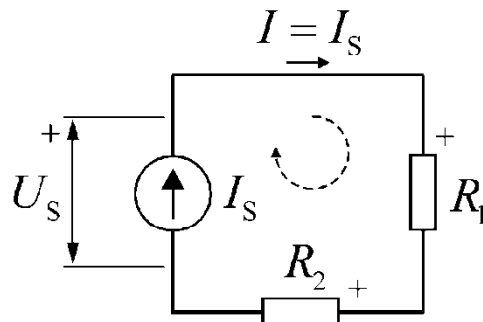
- primena: povećanje mernog opsega ampermetra

Idealni strujni generator

- struja kroz generator je I_S bez obzira na napon na generatoru,
- snaga: $P_S = U_S I_S$.



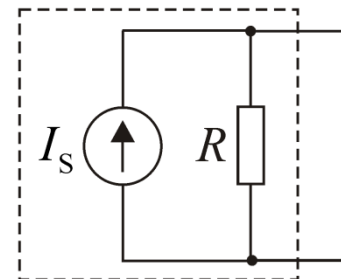
- Primer:



- $I = I_S$,
- II KZ:
 $R_1 I_S + R_2 I_S - U_S = 0$,
napon na strujnom generatoru:
 $U_S = (R_1 + R_2) I_S$.

- Realni strujni generator

- modeluje se kao paralelna veza idealnog strujnog generatora i otpornika



Teoreme kola VKS

- Teorema održanja snage

- sledi iz zakona održanja energije
- $P_{\text{gen}} > 0$, koristi se za proveru rešenja zadatka

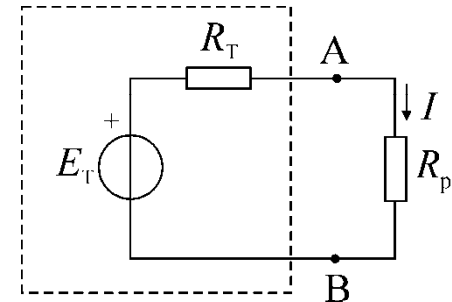
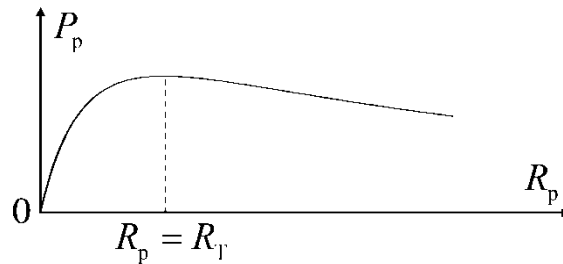
$$P_{\text{gen}} = P_J$$

- Tevenenova teorema

- kolo se u odnosu na bilo koje svoje dve tačke ponaša kao tzv. Tevenenov generator opisan sa E_T i R_T

- Prilagođenje po snazi

- za $R_p = R_T$ snaga prijemnika je maksimalna
kaže se: prijemnik je prilagođen po snazi na generator



$$R_T I + R_p I - E_T = 0$$

$$I = \frac{E_T}{R_T + R_p}, \quad P_p = R_p I^2$$

$$P_p = E_T^2 \frac{R_p}{(R_T + R_p)^2}$$