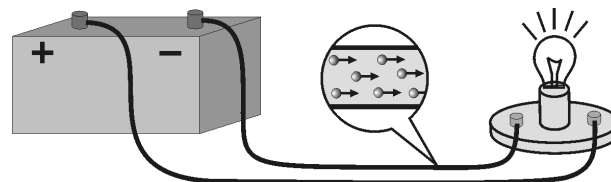


3. Vremenski konstantne struje

Equation Chapter 3 Section 1

3.1. Električna struja

Ako priključimo sijalicu na bateriju sijalica počne da svetli. Kažemo da svetli zato što postoji električna struja. Ako bi mogli nekako da pogledamo šta se to dešava u žici koja spaja bateriju i silalicu, videli bi organizovano kretanje naelektrisanja, slika 3.1. To znači da se pod pojmom električna struja podrazumena usmereno kretanje naelektrisanja.

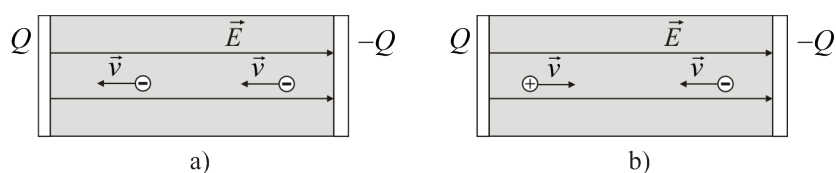


3.1 Sijalica priključena na bateriju.

U provodnim materijalima nosioci naelektrisanja su elektroni, pozitivni i negativni joni. U metalnim provodnicima od kojih se izrađuju žice za povezivanje i vlakna sijalice prikazane na slici 3.1, nosioci naelektrisanja su elektroni. Ukoliko otkaçimo žice sa baterije tada će i dalje u tim žicama i vlaknu sijalice postojati slobodni elektroni, ali njihovo kretanje neće biti organizovano (usmereno) već haotično. Haotično kretanje ne predstavlja električnu struju.

Da bi nastala električna struja u provodnicima potrebno je da u provodniku postoji električno polje. Električno polje deluje silom na slobodna naelektrisanja. Pod dejstvom te sile slobodna naelektrisanja počinju da se kreću.

Da bi imali električno polje potrebno je da imamo naelektrisana tela. Na slici 3.2 je prikazan poprečni presek sistema kojeg čine dve provodne ploče naelektrisane naelektrisanjima Q i $-Q$, između kojih je postavljen komad provodnog materijala (prikazan osenčenom površinom). Naelektrisane ploče stvaraju električno polje $\vec{E}$ usmereno od Q prema $-Q$. Pod dejstvom tog električnog polja, kao posledica električne sile na slobodna naelektrisanja unutar provodnog materijala, dolazi do organizovanog i usmerenog kretanja tih slobodnih naelektrisanja. Kod metalnih provodnika slobodna naelektrisanja su elektroni. Kod tečnosti i gasova to mogu biti elektroni, pozitivni joni i negativni joni.

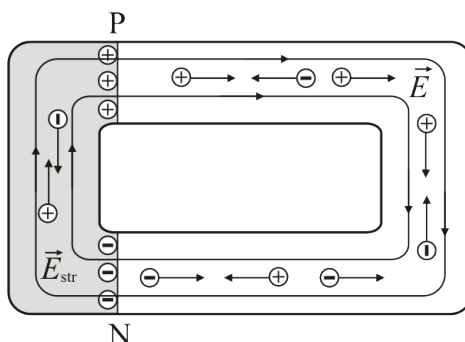


3.2 Kretanje naelektrisanja u provodniku pod dejstvom električnog polja u slučaju: a) metala i b) tečnosti i gasova.

Pozitivna naelektrisanja koja stignu na desnu ploču ($-Q$) smanjuju ukupnu količinu naelektrisanja te ploče. Takođe, negativna naelektrisanja koja stignu na levu ploču ($+Q$) smanjuju ukupnu količinu naelektrisanja te ploče. Zbog toga se smanjuje i električno polje koje ploče stvaraju. Smanjuje se i električna sila na preostala slobodna naelektrisanja. Taj proces se na kraju završava potpunim razelektrisanjem ploča i prestankom kretanja slobodnih naelektrisanja.

3.2. Izvori električne energije

Na slici 3.3 je prikazan provodnik desno od tačaka P i N. Pretpostavimo da na krajevima provodnika postoje nagomilana naelektrisanja. U tački P pozitivna, u tački N negativna. Ta razdvojena naelektrisanja stvaraju električno polje $\vec{E}$ unutar provodnika, u smeru od P ka N. Pod dejstvom tog električnog polja dolazi do usmerenog kretanja naelektrisanja unutar provodnika. Pozitivna se kreću u smeru električnog polja $\vec{E}$, negativa suprotno od smera vektora $\vec{E}$. Za održavanje stalnog kretanja naelektrisanja, odnosno električne struje u provodniku, neophodno je održavanje razdvojenih naelektrisanja na krajevima provodnika. Za to nam služe električni izvori. Na slici 3.3 električni izvor je označen osenčenim delom, levo od tačaka P i N. Nagomilana naelektrisanja, u blizini tačaka P i N, stvaraju električno polje čak i unutar električnih izvora, u smeru od P ka N. Međutim, u izvorima postoje neke druge sile, usmerene od N ka P, koje se suprotstavljaju silama električnog polja. Zahvaljujući stranim silama ipak dolazi do pomeranja pozitivnih naelektrisanja od N ka P, i negativnih od P ka N. Strano električno polje E_{str} unutar električnog izvora, prikazanog na slici 3.3, sva pozitivna naelektrisanja koja pristignu u tačku N prebacuje u tačku P. Takođe, sva negativna naelektrisanja koja pristignu u tačku P ponovo prebacuje u tačku N. Na taj način električni izvori održavaju uvek istu količinu razdvojenih naelektrisanja na krajevima provodnika, u tačkama P i N.



3.3 Princip rada električnih izvora.

Za stvaranje stranog električnog polja, E_{str} , potrebna je energija. U zavisnosti koju vrstu energije koriste, električni izvori se dele na:

1. elektrohemijske,
2. fotoelektrične,
3. termoelektrične i
4. elektromehaničke.

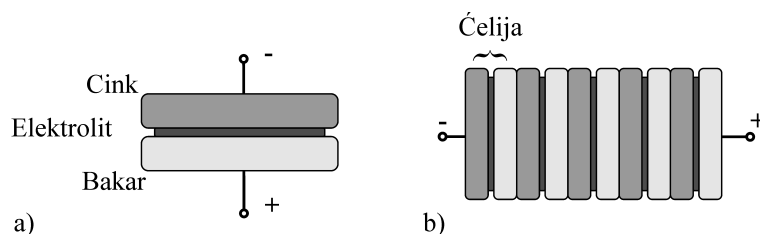
Izvori električne energije se nazivaju još i električni generatori.

Prva tri izvora spadaju u generatore vremenski konstantne struje. Oni na svojim krajevima obezbeđuju vremenski konstantnu količinu naelektrisanja koja stvara vremenski konstantno

električno polje u provodnicima. Pod dejstvom tog električnog polja u provodnicima se kreću naelektrisanja vremenski konstantnom brzinom, čineći vremenski konstantnu struju. Četvrti izvor je u osnovi izvor vremenski promenljive struje. Međutim pomoću odgovarajućih električnih komponenti moguće je od izvora vremenski promenljive struje napraviti izvor vremenski konstantne struje.

3.2.1. Elektrohemijski izvori

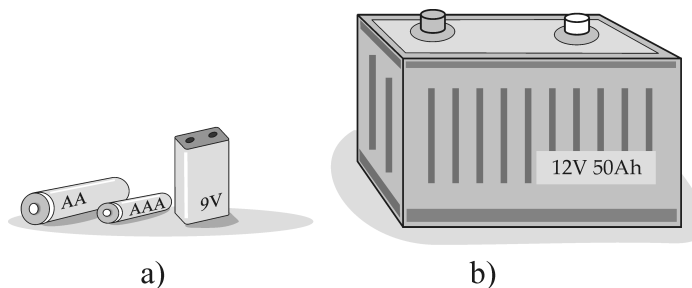
Elektrohemijski izvori električne energije rade na principu hemijske reakcije pri kojoj se unutar izvora razdvajaju naelektrisanja. Oksidacija i redukcija su dva hemijska procesa koji dovode do razdvajanja i generisanja pozitivnog i negativnog naelektrisanja. Oksidacija je proces otpuštanja elektrona. Oksidisana sredina postaje pozitivno naelektrisana. Pri redukciji dolazi do vezivanja elektrona. Sredina koja primi elektrone postaje negativno naelektrisana. Ovakvi izvori se nazivaju galvanski izvori po lekaru Galvaniju koji je prvi uočio ovu pojavu. Alesandro Volta je 1800 godine napravio prvi izvor vremenski konstantne struje u vidu naizmenično složenih bakarnih i cinkanih pločica u elektrolitu (kiselini). Voltin niz je bila preteča primarnih baterija kakve danas koristimo.



3.4 a) Galvanska ćelija, b) Voltin niz.

Hemijski izvori mogu biti primarni i sekundarni. Primarni izvori se mogu upotrebiti samo jednom. Kada se isprazne ne mogu više da se koriste. Sekundarni izvori se mogu upotrebljavati više puta. Kada se isprazne mogu se ponovo napuniti priključivanjem na neki drugi električni generator pri čemu se električna energija generatroya pretvara u hemijsku energiju sekundarnog izvora.

Primarni hemijski generatori su primarne baterije. Izrađuju se u raznim oblicima i veličinama 3.5.a. Baterije se sastoje od ćelija koje predstavljaju Voltine ili Leklanšeove elemente. Jedan element (ćelija) ima napon od 1,2 V do 1,5 V. Veći naponi se dobijaju rednim vezivanjem više ćelija. Materijali od kojih se izrađuju baterije su hemijski aktivni i često kancerogeni, zbog čega se ne smeju nekontrolisano odlagati.



3.5 a) Baterije, b) Akumulator.

U obnovljive ili sekundarne hemijske izvore svrstavaju se akumulatori (slika 3.5.b) i punjive baterije koje se izrađuju u istim oblicima i veličinama kao i primarne baterije. Akumulatori za razliku od baterija imaju mnogo veći kapacitet (količinu naelektrisanja). Mogu

da daju mnogo veću jačinu električne struje, pa se koriste u automobilima za pokretanje elektromotora (startera). Punjive baterije danas zamenjuju primarne baterije u gotovo svim mobilnim uređajima kao što su telefoni, tableti, laptop računari, fotoaparati, ručni električni alati, itd.

Goriva ćelija (eng. fuel cell) je izvor koji je takođe baziran na hemijskoj reakciji ali mu je za razliku od baterija neophodno gorivo. Vodonikove ćelije koriste tečni vodonik kao gorivo i kiseonik iz vazduha za sjedinjavanje u vodu. Pri tom sjedinjavanju se oslobađa električna energija i toplota. Vodonik je izuzetno eksplozivan i zbog toga ova tehnologija nije za sada u širokoj upotrebi. Tipovi gorivih ćelija razlikuju se po vrsti elektrolita koji se koristi. Međutim, bez obzira na tip gorive ćelije, na anodi se formira višak elektrona, a na katodi manjak.

3.2.2. Fotoelektrični izvori – solarne ćelije

Solarne ili fotonaponske (eng. photo voltaic ili skraćeno PV) ćelije pretvaraju svetlosnu energiju u električnu. Fotoni svetlosnog zračenja prodiru u materijal predajući energiju atomima. Ta energija omogućava elektronima da napuste atome. Na taj način dolazi do razdvajanja naelektrisanja. Elektroni su negativni nosioci naelektrisanja, dok su atomi bez elektrona pozitivni nosioci naelektrisanja. Danas se kao osnovni materijal za fotoćelije koristi silicijum. Maksimalan napon na priključcima jedne solarne ćelije na bazi silicijuma iznosi oko 0,5 V do 0,6 V. Za dobijanje većeg napona, solarne ćelije se povezuju u veće grupe tzv. panele.

Za potrebe domaćinstava, solarni paneli se postavljaju na krovove stambenih ili pomoćnih objekata. Sateliti se takođe napajaju energijom iz solarnih panela. Farme solarnih panela se postavljaju u pustinje i druga područja sa puno sunčanih dana, i koriste se kao elektrane za proizvodnju električne energije. Prenosivi električni uređaji poput kalkulatora imaju u sebi ugrađene male fotoćelije. Fotoćelije grupisane u panele dijagonale od 15 cm do 20 cm se koriste kao izvori električne energije za punjenje mobilnih telefona.

3.2.3. Termoelektrični izvori

Termoelektrični izvori koriste toplotnu energiju, odnosno temperaturni gradijent. Jedna strana materijala je toplija od druge strane. Ako postoji razlika u temperaturi gornjeg i donjeg kraja materijala dolazi do kretanja naelektrisanja. Ona „beže“ od toplijeg kraja. Počinju da se usmereno kreću što čini električnu struju. Termoelektrični generatori se prave spajanjem dva različita materijala u tzv. termo par. Oba materijala su spojena provodnikom na toplijem kraju, dok su drugi krajevi priključci generatora. U zavisnosti od upotrebljenih materijala zavisi i napon između priključaka. Efikasnost i snaga ovih izvora je mala. Upotrebljavaju se kao toplotni senzori. Sa povećanjem temperature raste i napon. Merenjem napona na krajevima termogeneratora (toplotnog senzora) može se posredno meriti temperatura.

3.2.4. Elektromehanički izvori električne energije

To su uređaji koji pretvaraju mehaničku energiju u električnu uz posredstvo magnetske energije. Mehanička energija se posredstvom elektromagnetskog polja pretvara u električnu energiju. Za stvaranje električne energije potrebno je kretanje provodnika u magnetskom polju, ili kretanje magneta u okolini provodnika. Deo koji se kreće naziva se rotor, a deo koji miruje naziva se stator. Rotor je povezan sa turbinom koja mu obezbeđuje mehaničku energiju. U zavisnosti kako se pokreće turbina razlikuju se i tipovi elektromehaničkih generatora. U

termoelektranama se zagreva voda koja prelazi u paru visokog pritiska koja pokreće turbine elektromotora. Za zagrevanje vode se koristi čvrsto gorivo (ugalj, drvo), zemni gas ili nafta. U novije vreme se koriste biogoriva koja se dobijaju preradom biomase. U nukleranim elektranama se voda zagreva hemijskom reakcijom nukleranom fizijom. U hidroelektranama kinetička energija vode pokreće turbine. Kod vetrogeneratora se koristi snaga vetra za okretanje turbina.

Elektromehanički izvori se koriste za proizvodnju velike količine električne energije, uglavnom, na nacionalnom nivou. Najčešće se nalaze pored rudnika, reka, veštačkih jezera ili planina, odnosno tamo gde se nalaze primarni izvori (ugalj, voda, vetar). Da bi se električna energija prenela do korisnika koristi se sistem za prenos i distribuciju električne energije. Elektromehanički izvori stvaraju vremenski promenljivu (naizmeniču) struju. Naizmenična struja se u elektronskim uređajima (ispravljačima) pomoću električnih komponenti ispravlja i tako dobija vremenski konstantna struja.

3.3. Jačina struje

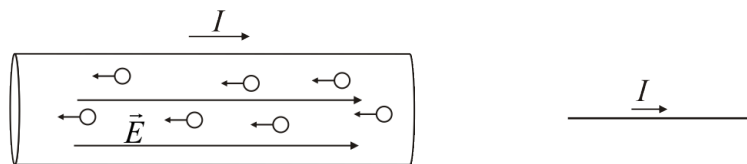
Fizička veličina kojom se kvantifikuje pojava električne struje je jačina struje. To je skalarna veličina koja predstavlja meru brzine usmerenog kretanja naelektrisanja. U elektrotehnici je uobičajeno da se izostavlja reč električne, pa se kaže samo jačina struje ili intenzitet struje.

Jačina struje u provodniku je količnik protekle količine naelektrisanja koja prođe kroz poprečni presek provodnika, i vremena koje je bilo potrebno da ta količina naelektrisanja prođe:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} . \quad (3.1)$$

Kako je jedinica za naelektrisanje kulon (C), a za vreme sekund (s), jedinica za jačinu struje je (C/s). Ovoj jedinici je dato posebno ime, amper (A).

Kao što je već ranije rečeno, u metalnim provodnicima su nosioci naelektrisanja elektroni. Oni se pod dejstvom električnog polja kreću u smeru suprotnom od smera električnog polja $\vec{E}$, kao što je prikazano na slici 3.6. Međutim smer struje se po dogovoru uzima u pravcu kretanja pozitivnih naelektrisanja, odnosno suprotno kretanju elektrona. Smer struje se označava strelicom pored provodnika.



3.6 Smer kretanja elektrona u metalnim provodnicima i referentni smer struje.

Ukoliko je električno polje u provodniku vremenski konstantno, tada je i sila električnog polja na naelektrisanja u provodniku vremenski konstantna. Pod dejstvom te sile elektroni se kreću vremenski konstantnom brzinom čineći vremenski konstantnu struju.

Iz relacije (3.1) možemo izvesti alternativnu jedinicu za količinu naelektrisanja koja se često koristi u praksi. Poznato je da je $(C) = (A) \cdot (s)$. Ako se umesto sekunde kao jedinica za vreme t uzme jedan sat (čas) tada se kao jedinica za naelektrisanje može koristiti i amperčas:

$$1 \text{ Ah} = 3600 \text{ As} = 3600 \text{ C}.$$

Primer 3.1

Baterija kapaciteta 2700 mAh se prazni vremenski konstantnom strujom jačine 0,5 A. Nakon koliko vreme će baterija biti prazna?

Rešenje. Na početku je baterija napunjena pa je $Q_{\text{početno}} = 2,7 \text{ Ah}$. Na kraju je baterija prazna pa je $Q_{\text{krajnje}} = 0$. Vremenski interval za koje se isprazni baterija se određuje na osnovu izraza (3.1) i glasi: $\Delta t = \Delta Q / I = 2,7 \text{ Ah} / 0,5 \text{ A} = 5,4 \text{ h}$. ■

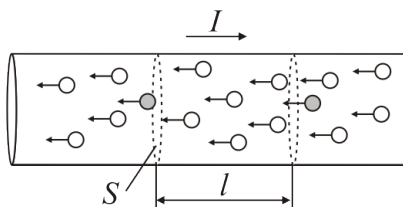
Primer 3.2

Prazan akumulator kapaciteta 60 Ah je potrebno napuniti do njegove polovine za vreme od 12 časova. Odrediti potrebnu jačinu struje punjenja akumulatora.

Rešenje. Na početku je akumulator prazan pa je $Q_p = 0$. Posle $\Delta t = 12 \text{ h}$ akumulator je napunjen do pola, pa je $Q_k = 30 \text{ Ah}$. Jačina struje potrebna za punjenje akumulatora je $I = \Delta Q / \Delta t = 30 \text{ Ah} / 12 \text{ h} = 2,5 \text{ A}$. ■

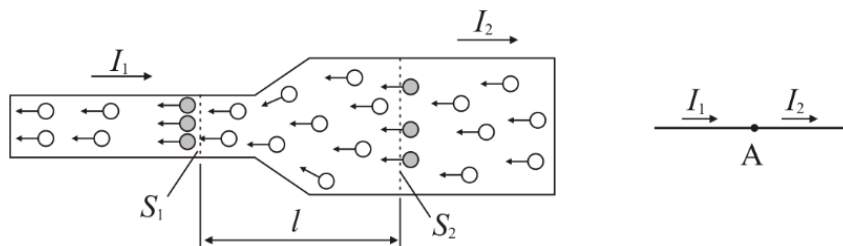
3.4. Prvi Kirhovof zakon

U provodnicima sa vremenski konstantnom strujom se nosioci naelektrisanja kreću vremenski konstantnom brzinom. Ako se jedan elektron pomeri i napusti svoje mesto, drugi elektron dolazi za njim i popunjava to mesto. To znači da je broj elektrona unutar zapremine $V = l \cdot S$ nepromenljiv. Na slici 3.7 je ilustrovano kretanje elektrona kao i broj elektrona unutar zapremine V . Kada jedan elektron napusti zapreminu, drugi ulazi u nju, održavajući isti broj elektrona unutar zapremine.



3.7 Kretanje elektrona unutar provodnika sa vremenski konstantnom strujom.

Ukoliko spojimo dva provodnika tada će naelektrisanja iz jednog provodnika nastaviti da se kreću kroz drugi provodnik. Mesto spajanja se naziva čvor. Na slici 3.8 je ilustrovano spajanje dva provodnika različite debljine. Isprekidanim linijama je označena zapremina V unutar koje se broj elektrona ne menja. Ako u zapreminu V kroz površinu S_2 uđe npr. 3 elektrona, tada iz te zapremine kroz površinu S_1 izađe 3 elektrona.



3.8 Jačina struje unutar provodnika različite debljine.

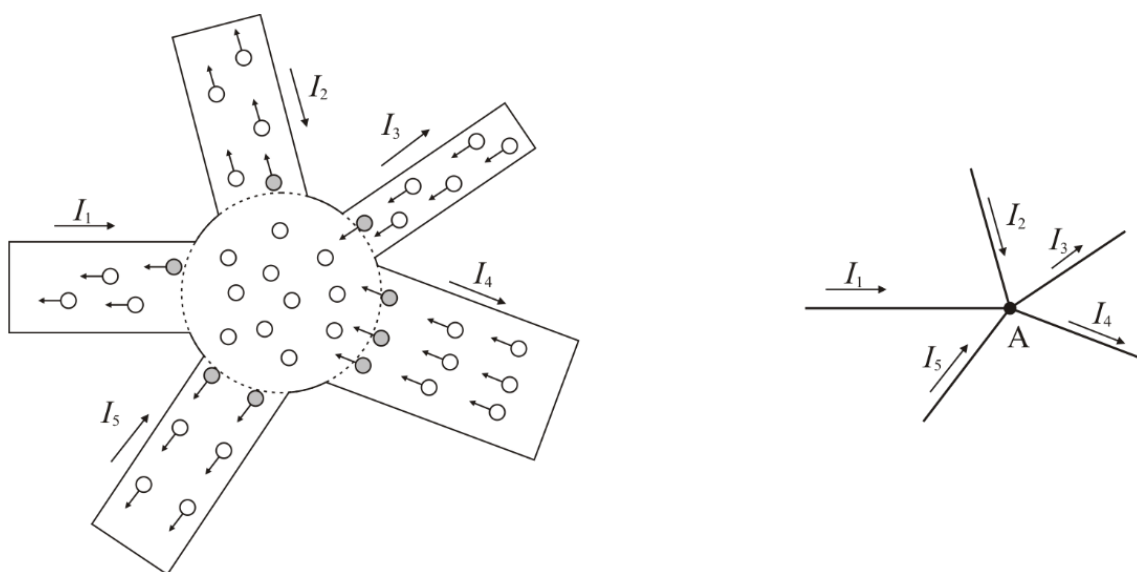
U protivnom, došlo bi do nagomilavanja naelektrisanja. Raspodela naelektrisanja bi se menjala. Menjalo bi se i električno polje u provodniku, pa ona onda ne bi bila vremenski nepromenljiva. To znači da je količina naelektrisanja koja za vreme Δt prođe kroz S_1 ista kao količina naelektrisanja koja prođe kroz S_2 :

$$\frac{\Delta Q_{\text{kroz } S_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_{\text{kroz } S_2}}{\Delta t},$$

odnosno, jačina struje u tanjem i debljem provodniku je ista. Za čvor A na slici 3.8 može da se napiše da je

$$I_1 = I_2.$$

Analiza kretanja naelektrisanja unutar provodnika se može proširiti na slučaj spajanja tri ili više provodnika. Na slici 3.9 je ilustrovano spajanje pet provodnika različite debljine. Isprekidanim linijama je označena zapremina V unutar koje se broj elektrona ne menja. Mesto spajanja dva ili više provodnika se naziva čvor. Na slici 3.9 čvor je obeležen slovom A.



3.9 Jačine struja unutar provodnika različitih debljina.

Koliko naelektrisanja (elektrona u slučaju metalnih provodnika) uđe u čvor toliko mora i da izađe iz čvora. Za čvor A prikazan na slici 3.9 to znači da je

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_5 = \Delta Q_3 + \Delta Q_4.$$

Ukoliko podelimo prethodni izraz sa vremenom, Δt , dobićemo da je

$$I_1 + I_2 + I_5 = I_3 + I_4.$$

Za svaki čvor u električnom kolu u kome se stiču dva ili više provodnika važi da je ukupna jačina struje koja uđe u taj čvor jednaka ukupnoj jačini struje koja izađe iz tog čvora. Ovu zakonitost je utvrdio nemački fizičar Gustav Kirhof. Prebacujući sve struje na jednu stranu jednakosti, prethodna jednačina može da se zapiše i na sledeći način:

$$-I_1 - I_2 - I_5 + I_3 + I_4 = 0$$

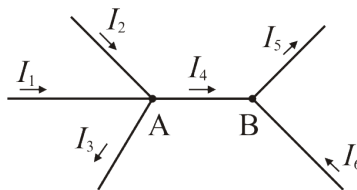
Matematička formulacija prvog Kirhofovog zakona za čvor sa n grana glasi

$$\sum_{m=1}^n I_m = 0. \quad (3.2)$$

Pri tome se za struje koje izlaze iz čvora piše predznak „+“ a za struje koje ulaze u čvor se piše predznak „-“.

Primer 3.3

Izračunati jačinu struje I_6 u naznačenom referentnom smeru ako su: $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 0,5 \text{ A}$, $I_3 = 0,7 \text{ A}$ i $I_5 = 0,4 \text{ A}$.



Rešenje. Za čvor A možemo da napišemo jednačinu: $-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0$ odakle se nalazi da je $I_4 = 0,8 \text{ A}$. Za čvor B pišemo jednačinu: $-I_4 + I_5 - I_6 = 0$ odakle se nalazi da je $I_6 = -0,4 \text{ A}$. Negativna vrednost struje znači da je pravi smer struje I_6 suprotan od referentnog (pretpostavljenog) smera struje. ■

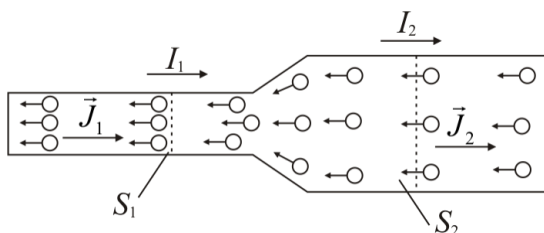
3.5. Gustina struje

Gustina struje je druga fizička veličina kojom se opisuje električna struja. Gustina struje je odnos jačine struje u provodniku i površine poprečnog preseka provodnika, i data je izrazom:

$$J = \frac{I}{S}. \quad (3.3)$$

Jedinica za gustinu struje je amper po metru kvadratnom (A/m^2).

Gustina struje je veoma bitna veličina kada je u pitanju zagrevanje provodnika i njegovo eventualno pregrevanje koje može da izazove topljenje provodnika. Razliku između jačine i gustine struje ćemo objasniti na primeru metalnog žičanog provodnika. Ukoliko spojimo deblju i tanju žicu, kako što je prikazano na slici 3.10, kroz obe žice će kroz porečni presek provodnika proticati isti broj elektrona (ista količina naelektrisanja). To znači da je i jačina struje ista kako u debljoj žici, površine poprečnog preseka S_2 , tako i u tanjoj žici, površine $S_1 < S_2$. Međutim, gustina struje nije ista. U tanjoj žici gustina struje je veća nego u debljoj žici $J_1 > J_2$. Ovo je veoma važno prilikom dizajniranja električnih uređaja ili električne instalacije. Prevelika gustina struje može da istopi žicu i tako potencijalno prouzrokuje požar. Na primer, gustine struje od 50 A/m^2 otapa bakarni provodnik. Kako ne bi došlo do otapanja bakarnih provodnika poželjno je da gustina struje bude u opsegu $3 - 10 \text{ A/m}^2$.



3.10 Spajanje provodnika različite debljine.

Prevelika gustina struje može da prouzrokuje topljenje bilo kog provodnog elementa u električnim kolima. To može da bude i sijalica, prekidač, električni motor, grejalica, fen za kosu. Mogu biti i električne komponente unutar električnih uređaja poput procesora, ram

memorije, grafičke kartice pa čak i baterije u mobilnom telefonu. Zbog toga se u električne uređaje ugrađuje strujna zaštita. Topljivi osigurači spadaju u pasivnu zaštitu. To su elementi koji namerno imaju jako tanku žicu koja se topi pri struji većoj od predviđene. Nakon topljenja žice, osigurač se ponaša kao prekid u kolu.

Primer 3.4

U bakarnom provodniku kružnog poprečnog preseka, površine 4 mm^2 uspostavljena je vremenski konstantna struja jačine 5 A . Izračunati a) gustinu struje u provodniku i b) broj elektrona koji prođu kroz površinu poprečnog preseka provodnika u toku jedne sekunde.

Rešenje. Gustina struje je $J = I / S = 1,25 \text{ A/mm}^2$. Ukupna količina naelektrisanja koja prođe kroz poprečni presek provodnika je $\Delta Q = I \cdot \Delta t = 5 \text{ As} = 5 \text{ C}$. Broj elektrona možemo da odredimo poznavajući naelektrisanje koje nosi jedan elektron kao $N_e = \Delta Q / e$. Negativan vrednost naelektrisanja elektrona je zanemarena zato što nas interesuje samo njihov broj a ne i smer kretanja. $N_e = 5 / (1,6 \cdot 10^{-19}) = 3,125 \cdot 10^{19}$. ■

Primer 3.5

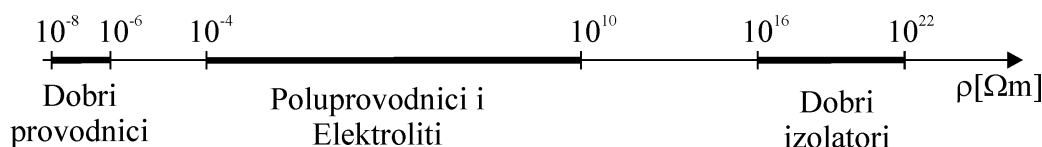
Odrediti potrebnu debljinu bakarnog provodnika kružnog poprečnog preseka tako da provodnik izdrži struju od 25 A . Maksimalna gustina struje koju ovaj provodnik može da izdrži bez pregrevanja je 5 A/mm^2 .

Rešenje. $S = I / J_{\text{max}} = 5 \text{ mm}^2$. Kako je $S = (d / 2)^2 \pi$ sledi da je debljina provodnika $d = \sqrt{4S / \pi} = 2,52 \text{ mm}$. Približna vrednost je $d \approx \sqrt{S} = 2,23 \text{ mm}$ sa greškom od 10%. ■

3.6. Specifična otpornost materijala

Već je pomenuto u uvodnom delu da se, sa aspekta provodljivosti naelektrisanja, materijali mogu podeliti na provodnike, poluprovodnike i izolatore. Pri tome je ta provodljivost bila povezana sa sposobnošću materijala da lakše ili teže otpuštaju elektrone. Kada se materijali izlože električnom polju tada ti elektroni počinju da se kreću kroz materijal lakše ili teže.

Svaki materijal u kome je uspostavljena električna struja se suprotstavlja električnoj struji, odnosno kretanju naelektrisanja (elektrona u slučaju metalnih provodnika). Mera ovog suprotstavljanja naziva se specifična otpornost. Označava se sa ρ i jedinica je om-metar (Ωm). Provodnici, koji imaju mnogo slobodnih elektrona, imaju malu specifičnu otpornost. Sa druge strane, izolatori koji imaju mali broj slobodnih elektrona, imaju veliku specifičnu otpornost. Čisti poluprovodnici, u pogledu otpornosti, se obično ponašaju više kao izolatori, nego kao provodnici. Zato se u praksi, u poluprovodnike dodaju nečistoće da bi se smanjila njihova specifična otpornost. Na slici 3.11 je prikazana skala na kojoj su ilustrativno prikazani redovi veličina specifične otpornosti materijala grubo podeljenih u tri celine.



3.11 Specifična otpornost, red veličina i gruba podela materijala.

Sa promenom temperature menja se i specifična otpornost materijala. Temperaturna zavisnost se iskazuje uvođenjem temperaturnog koeficijenta α na sledeći način

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha (\theta - \theta_0)), \quad (3.4)$$

gde je ρ_0 specifična otpornost na temperaturi θ_0 (obično 0 ili 20°C). Kod nekih materijala raste kod nekih opada. Specifična otpornost metala se povećava sa porastom temperature i kod njih je $\alpha > 0$. Specifična otpornost grafita, izolatora, poluprovodnika i elektrolita se smanjuje sa porastom temperature i kod njih je $\alpha < 0$. Tabela 3.1 sadrži specifične otpornosti za neke materijale na 20°C.

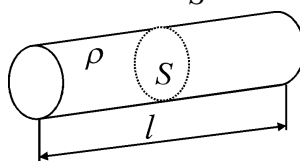
Tabela 3.1 Specifične otpornosti nekih materijala na 20°C.

Materijal	Specifična otpornost ρ [Ωm]	Materijal	Specifična otpornost ρ [Ωm]
Srebro	$1,59 \cdot 10^{-8}$	Staklo	$10^{10} - 10^{14}$
Bakar	$1,68 \cdot 10^{-8}$	PVC	$10^9 - 10^{11}$
Zlato	$2,44 \cdot 10^{-8}$	Bakelit	$10^{11} - 10^{12}$
Aluminijum	$2,82 \cdot 10^{-8}$	Teflon	$10^{22} - 10^{24}$
Grafit	$3,5 \cdot 10^{-5}$	Transf. ulje	10^{11}
Čist silicijum	640	Drvo suvo	10^{11}

3.7. Otpornost

Veličina kojom se iskazuje mera kojom neka komponenta pruža otpor električnoj struji naziva se otpornost. Obeležava se sa R a jedinica je om (Ω). Ako posmatramo uzorak u obliku valjka (slika 3.12) ili nekog drugog oblika sa konstantnim poprečnim presekom dužine l , površine poprečnog preseka S napravljenog od materijal specifične otpornosti ρ , tada se otpornost tog objekta računa kao

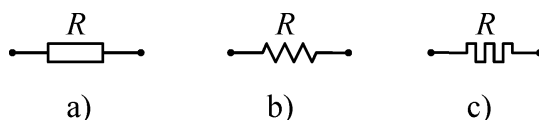
$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (3.5)$$



3.12 Oblik i dimenzije objekta sa konstantnim poprečnim presekom.

Objekti koji se koriste u elektrotehnici se izrađuju od raznih materijala u zavisnosti od primene. Na primer, za prenos električne energije koriste se žice. Žice se prave u obliku valjka različitih debljina i dužina. Prave se od materijala male specifične otpornosti, reda 10^{-8} , kao što je na primer bakar i aluminijum. Žice služe za prenos električne energije od električnih generatora do prijemnika sa što manjim pružanjem otpora. Sa druge strane postoje objekti čija je uloga da ograniče jačinu struje, pružajući odgovarajući otpor kretanju naelektrisanja. Ti objekti se zovu otpornici i izrađuju se od materijala koji imaju mnogo veću specifičnu otpornost od aluminijuma ili bakra. Obično su valjkastog oblika različitih debljina i dužina.

Grafički simbol za žicu je tanka puna linija. Grafički simboli otpornika su prikazani na slici 3.13. U Evropi se koristi simbol dat na slici 3.13.a, dok se u Americi koristi simbol 3.13.b.



3.13 Grafički simboli za otpornik.

Primer 3.6

Odrediti otpornost žice od bakra dužine 2 km i debljine 10 mm, ako je specifična otpornost $1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$. Odrediti dužinu otpornika od grafitu, debljine 2mm i otpornosti iste kao bakarana žica, ako je specifična otpornost grafitu $3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \text{m}$.

Rešenje. Površina poprečnog preseka žice je $S = (d/2)^2 \pi = 25\pi \text{ mm}^2$. Otpornost žice iznosi $R = \rho_{\text{Cu}} l_{\text{Cu}} / S = 1,68 \cdot 10^{-8} \times 2 \cdot 10^3 / 78,5 \cdot 10^{-6} = 0,42 \Omega$. Dužina otpornika od grafitu iznosi $l_{\text{C}} = RS / \rho_{\text{C}} = 0,42 \times \pi \cdot 10^{-6} / 3,5 \cdot 10^{-5} = 3,77 \text{ m}$. ■

Primer 3.7

Otpornost vlakna sijalice na temperaturi 25°C iznosi 50Ω . Nakon uključenja sijalice vlakno sijalice se zagreje na temperaturu 2500°C . Ako je temperaturni koeficijent vlakna sijalice $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} 1/^\circ \text{C}$ odrediti otpornost užarene sijalice.

Rešenje. Otpornost sijalice se računa kao $R = \rho l / S$, pri čemu specifična otpornost zavisi od temperature kao $\rho = \rho_0 (1 + \alpha (\theta - \theta_0))$. Kombinovanjem ova dva izraza dobija se izraz $R = R_0 (1 + \alpha (\theta - \theta_0))$, pri čemu je $R_0 = 50 \Omega$ otpornost na temperaturi $\theta_0 = 25^\circ \text{C}$ određena pomoću izraza $R_0 = \rho_0 l / S$. Uvrštavanjem brojnih vrednosti otpornost sijalice na temperaturi $\theta = 2500^\circ \text{C}$ iznosi $R = 50 \times (1 + 5 \cdot 10^{-3} \times (2500 - 25)) = 668,75 \Omega$. ■

3.8. Redna i paralelna veza otpornika

Kada su otpornici vezani u nizu, kaže se da su otpornici vezani redno. To znači da se kraj jednog otpornika priključuje na kraj drugog otpornika. Jačina struje kroz svaki otpornik u rednoj vezi otpornika je ista. Primer redne veze N otpornika je prikazan na slici 3.14.

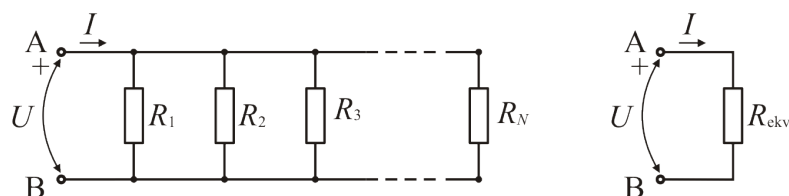
3.14 Redna veza N otpornika. Struja je ista kroz sve redno vezane otpornike.

Radi jednostavnije analize električnih kola, N redno vezanih otpornika možemo da zamenimo jednim otpornikom otpornosti R_{ekv} . Otpornost ekvivalentnog otpornika se u slučaju redne veze otpornika određuje pomoću izraza

$$R_{\text{ekv}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N. \quad (3.6)$$

Nakon zamene N redno vezanih otpornika jednim otpornikom, napon i jačina struje između tačaka A i B ostaju nepromenjeni.

Ako je svaki od otpornika vezan između dve iste tačke, kaže se da su otpornici vezani paralelno. Napon na svakom otporniku u paralelnoj vezi otpornika je isti. Primer N paralelno vezanih otpornika je prikazana na slici 3.15.



3.15 Paralelna veza N otpornika. Napon je isti na svim otpornicima.

Bez obzira na broj paralelno vezanih otpornika, uvek ih je moguće zameniti jednim otpornikom otpornosti R_{ekv} koji bi bio priključen između tačaka A i B. Otpornost ekvivalentnog otpornika se u slučaju paralelne veze otpornika određuje pomoću izraza

$$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}. \quad (3.7)$$

Zamenom N paralelno vezanih otpornika jednim otpornikom, ne menja se napon između tačaka A i B. Jačina struje kroz R_{ekv} je jednaka zbiru struja koje prolaze kroz sve N paralelno vezane otpornike.

Dodavanjem otpornika na red povećava se ukupna otpornost te veze. Dodavanjem otpornika u paralelu smanjuje se ukupna otpornost te veze. Ukoliko za potrebe izgradnje uređaja ne postoji fabrički otpornik željene otpornosti tada se povezivanjem fabričkih otpornika može dobiti potrebna otpornost. Na primer ako imamo na raspolaganju otpornike $R_1 = 1000\Omega$ i $R_2 = 2200\Omega$, tada se rednom vezom ova dva otpornika može dobiti otpornost od 3200Ω , dok se paralelnom vezom dobija otpornost $687,5\Omega$.

Primer 3.8

Dva otpornika otpornosti R_1 i R_2 su vezana redno. Ako je otpornost jednog otpornika 100Ω , a ukupna otpornost 300Ω odrediti otpornost drugog otpornika.

Rešenje. $R_e = R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 = R_e - R_1 = 200\Omega$. ■

Primer 3.9

Dva otpornika otpornosti R_1 i R_2 su vezana paralelno. Ako je otpornost jednog otpornika 300Ω , a ukupna otpornost 100Ω odrediti otpornost drugog otpornika.

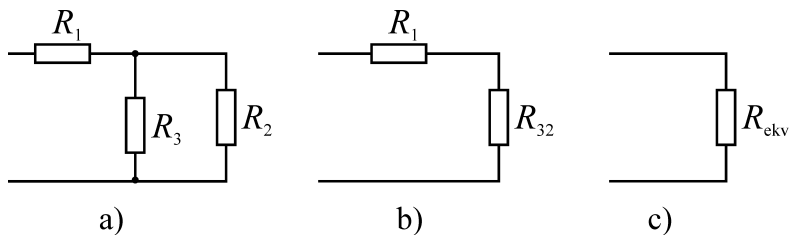
Rešenje. Kako je $1/R_e = 1/R_1 + 1/R_2$ sledi da je $1/R_2 = 1/R_e - 1/R_1 = 2/300$, odnosno $R_2 = 150\Omega$. ■

3.9. Mešovita veza otpornika

Pod mešovitom vezom otpornika podrazumeva se složena veza u kojoj postoje i redne veze i paralelne veze. Kod mešovite veze važno je uočiti grupu otpornika koji su vezani redno ili paralelno, bez obzira na ostale otpornike. Takve otpornike moguće je zameniti jednim otpornikom ekvivalentne otpornosti čime se dobija novo ekvivalentno kolo. U novodobijenom ekvivalentnom kolu, u kome je broj otpornika manji, potrebno je ponoviti postupak. Zato se kaže da se ekvivalentna otpornost mešovite veze otpornika određuje postepenim zamenjivanjem rednih i paralelnih veza njihovim ekvivalentnim otpornostima u nekoliko koraka dok se ne dođe do samo jednog otpornika.

Primer 3.10

Odrediti otpornost ekvivalentnog otpornika kojim može da se zameni grupa otpornika prikazana na slici 3.16.a.



3.16 a) Mešovita veza veza otpornika, b) i c) ekvivalentne šeme.

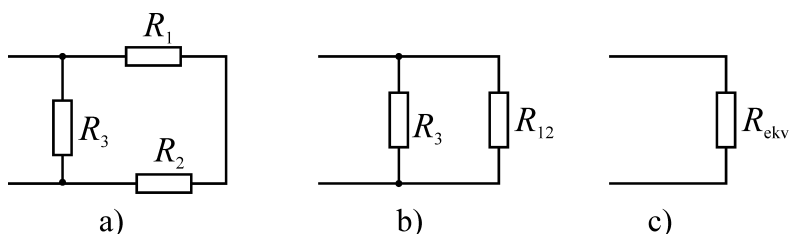
Rešenje. U primeru prikazanom na slici 3.16.a, otpornici R_2 i R_3 su vezani paraleleno. Prvi korak je da se ta dva otpornika zamene jednim otpornikom. Ekvivalentna otpornost tog otpornika iznosi $1/R_{32} = 1/R_2 + 1/R_3$. Sređivanjem razlomka dobija se

$$R_{32} = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_3 + R_2}.$$

Na ekvivalentnoj šemi prikazanoj na slici 3.16.b, otpornici R_1 i R_{32} su vezani redno. Ekvivalentna otpornost kojom mogu da se zamene sva tri otpornika (slika 3.16.c) jednaka je $R_{ekv} = R_1 + R_{32}$. ■

Primer 3.11

Odrediti otpornost ekvivalentnog otpornika kojim može da se zameni grupa otpornika prikazana na slici 3.17.a.



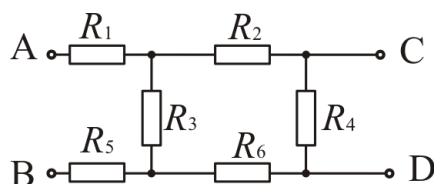
3.17 a) Mešovita veza veza otpornika, b) i c) ekvivalentne šeme.

Rešenje. Najpre se redna veza otpornika R_1 i R_2 zameni otpornikom otpornosti $R_{12} = R_1 + R_2$. Zatim se odredi ekvivalentna otpornost cele grupe kao: $1/R_{ekv} = 1/R_3 + 1/R_{12}$. Sređivanjem razlomka dobija se

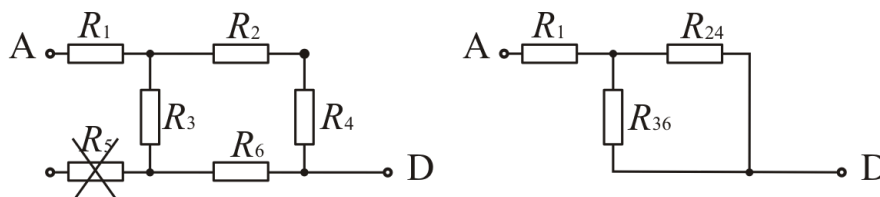
$$R_{ekv} = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_3 + R_2}. \quad \blacksquare$$

Primer 3.12

Odrediti ekvivalentnu otpornost grupe otpornika datih na slici između tačaka A i D.



Rešenje. Kada električna mreža ima više priključaka (u ovom slučaju četiri priključka) tada je potrebno utvrditi koji priključci se ne računaju. Ako se određuje otpornost između priključaka A i B tada se ostali priključci ne gledaju. Može se mreža posmatrati kao lavirint kod koga su izlazi C i D zatvoreni.



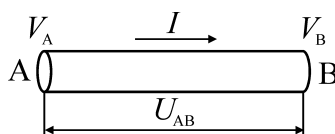
Ako se kroz priključak C ne prolazi, tada se ne prolazi ni kroz otpornik R_5 , tako da se on može isključiti. Samim tim otpornici R_3 i R_6 su vezani redno. Iz sličnog razloga su i otpornici R_2 i R_4 vezani redno. Pri tome je $R_{e1} = R_2 + R_4$ i $R_{e2} = R_3 + R_6$. Poslednja dva otpornika su vezana paralelno što se ponekad zapisuje kao $R_{e1} \parallel R_{e2}$. Oni mogu da se zamene otpornikom čija je otpornost $1/R_{e3} = 1/R_{e1} + 1/R_{e2}$. Ekvivalentna otpornost ove mešovite veze otpornika je $R_{AD} = R_1 + R_{e3}$. Ako svi otpornici imaju istu otpornost R tada je $R_{AD} = 2R$. Čitaocu se ostavlja da dokaže da je otpornost između tačaka A i C jednaka $7R/4$. ■

3.10. Omov zakon

Jačina struje u provodniku je srazmerna naponu između krajeva provodnika. Ovaj iskaz predstavlja Omov zakon. Koeficijent srazmere napona i jačine struje u provodniku je otpornost tog provodnika. Omov zakon u matematičkom obliku može da se napiše na sledeći način

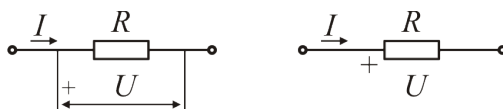
$$I = \frac{U}{R} \quad \text{ili} \quad U = R \cdot I. \quad (3.8)$$

Na slici 3.18 je prikazan provodnik kod koga je levi kraj (tačka A) na potencijalu V_A a desni kraj (tačka B) na potencijalu V_B . Ako je $V_A > V_B$ tada je smer struje od tačke A ka tački B, kao što je označeno strelicom pored provodnika. Drugim rečima, smer struje je od tačke na višem potencijalu ka tački na nižem potencijalu provodnika.



3.18 Omov zakon. Smer struje kroz provodnik.

U izrazu (3.8) je pretpostavljeno da je smer struje usklađen sa naponom. Umesto oznaka A i B, napon može da se označi strelicama pri čemu je uvek jedan kraj na višem potencijalu a drugi na nižem. Znak “+” na slici 3.19 označava onaj kraj otpornika koji se nalazi na višem potencijalu.

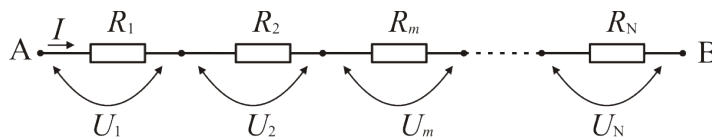


3.19 Odnos referentnog napona i smera struje kroz otpornik.

U složenim električnim kolima često se ne može u napred znati koji je pravi smer struje kroz pojedine otpornike. U takvim situacijama se uvodi referentni smer struje. Odnosno,

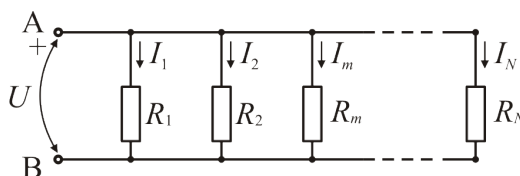
pretpostavi se jedan od dva moguća smera. Prema Omovom zakonu napon na tom otporniku je $U = R \cdot I$, pri čemu je kraj otpornika koji je na višem potencijalu, onaj u koji struja ulazi.

Kod redne veze N otpornika jačina struje je ista kroz sve otpornike. Kako je prema Omovom zakonu napon na svakom od m otpornika, $U_m = R_m \cdot I$, sledi da je najveći napon na otporniku najveće otpornosti.



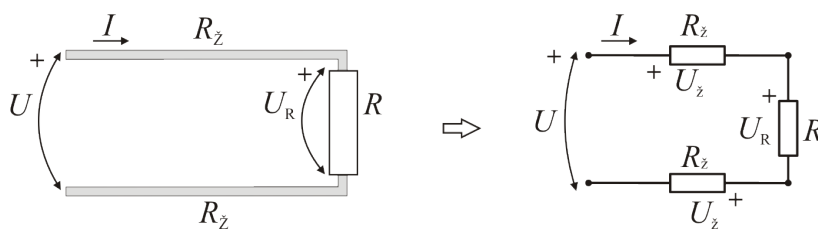
3.20 Omov zakon i redna veza otpornika.

Kod paralelne veze N otpornika napon je isti na svim otpornicima. Kako je prema Omovom zakonu struja kroz svaki od m otpornika $I_m = U/R_m$, sledi da je najveća jačina struje u otporniku najmanje otpornosti.



3.21 Omov zakon i paralelna veza otpornika.

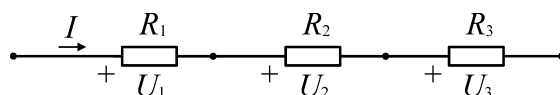
Žice kojima se povezuju elementi se najčešće posmatraju kao idealne, a simbol je tanka puna linija. Otpornost tih idealnih žica je nula. Međutim u praksi i one imaju otpornost kao što je objašnjeno u poglavlju 3.7. To znači da se na krajevima žice, čija je otpornost R_z , formira napon $U_z = R_z \cdot I$, u skladu sa Omovim zakonom. Ukoliko želimo da u električnim kolima uračunamo i otpornost žice za povezivanje tada se ta žica modeluje otpornikom otpornosti R_z , koji se sa ostalim elementima povezuju idealizovanim žicama za povezivanje, kao što je prikazano na slici 3.22.



3.22 Modelovanje žičanog provodnika u slučaju kada se njegova otpornost ne može zanemariti.

Primer 3.13

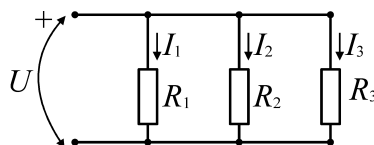
Data je redna veza 3 otpornika otpornosti $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$ i $R_3 = 500\Omega$. Ako je na otporniku R_2 napon 100V, izračunati napon na otpornicima R_1 i R_3 .



Rešenje. Prema Omovom zakonu kroz otpornik otpornosti R_2 protiče struja jačine $I_2 = U_2/R_2 = 0,5\text{ A}$. Kako su otpornici vezani redno kroz njih teče struja iste jačine, $I = I_1 = I_2 = I_3$. Naponi na otpornicima R_1 i R_3 su $U_1 = R_1 I_1 = 50\text{ V}$ i $U_3 = R_3 I_3 = 250\text{ V}$. Kod redne veze otpornika najveći je napon na otporniku najveće otpornosti. ■

Primer 3.14

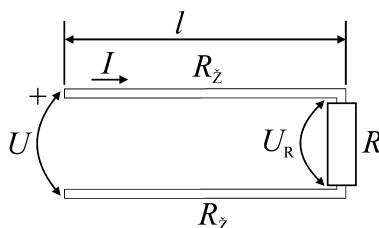
Data je paralelna veza 3 otpornika otpornosti $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$ i $R_3 = 500\Omega$. Ako kroz otpornik R_2 protiče struja jačine $0,5\text{ A}$, izračunati jačinu struje kroz otpornike R_1 i R_3 .



Rešenje. Prema Omovom zakonu na otporniku otpornosti R_2 je napon $U_2 = I_2 R_2 = 100\text{ V}$. Kako su otpornici vezani paralelno napon na svim otpornicima je isti, $U = U_1 = U_2 = U_3$. Jačine struja kroz otpornike R_1 i R_3 su $I_1 = U_1 / R_1 = 1,0\text{ A}$ i $I_3 = U_3 / R_3 = 0,2\text{ A}$. Kod paralelne veze otpornika najveća je struja kroz otpornik najmanje otpornosti. ■

Primer 3.15

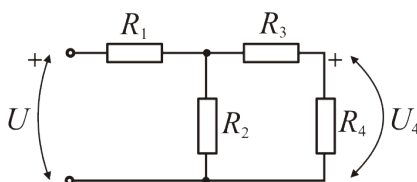
Za napajanje prijemnika otpornosti $R = 100\Omega$ uotrebljen je dvožični kabel dužine $l = 200\text{ m}$. Žice u kablju su od bakra specifične otpornosti $1,68 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$ i površine poprečnog preseka $S = 1,5\text{ mm}^2$. Ako je prijemnik preko kabela priključen na napon 220 V , izračunati jačinu struje kroz kabel kao i napon na samom prijemniku.



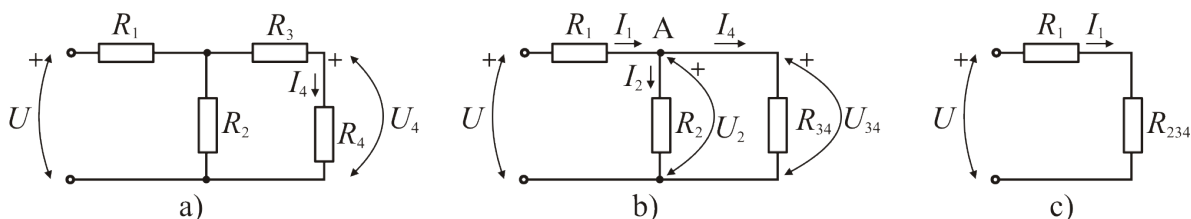
Rešenje. Otpornost jedne žice u kablju je $R_z = \rho l / S = 2,24\Omega$. Ukupna otpornost redne veze dve žice i prijemnika je $R_{\text{ekv}} = 2R_z + R = 104,48\Omega$. Jačine struja je $I = U / R_{\text{ekv}} = 2,105\text{ A}$. Na prijemniku je prema Omovom zakonu $U_R = R \cdot I = 210,5\text{ V}$. Zbog otpornosti kabela za povezivanje prijemnika na samom prijemniku je napon manji za $9,5\text{ V}$ ili za oko $4,3\%$. ■

Primer 3.16

Na slici je prikazana mešovita veza otpornika otpornosti $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 250\Omega$, $R_3 = 200\Omega$ i $R_4 = 50\Omega$. Ako je napon $U_4 = 100\text{ V}$ odrediti napon U .



Rešenje. Primenjujući Omov zakon na otporniku otpornosti R_4 , možemo odrediti jačinu i smer struje I_4 . Smer struje je prikazan na sledećoj slici (šema a), pri čemu je $I_4 = 2\text{ A}$. Kako su otpornici R_3 i R_4 vezani redno, kroz njih protiče ista struja. Otpornike R_3 i R_4 možemo da zamenimo otpornikom $R_{34} = R_3 + R_4 = 250\Omega$, čime se električna šema (a) svodi na ekvivalentnu šemu (b).

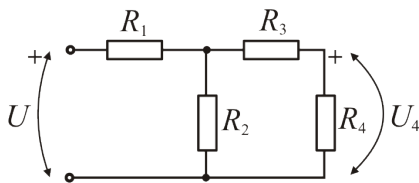


Primenom Omovog zakona, napon na otporniku R_{34} je $U_{34} = R_{34} \cdot I_4 = 500 \text{ V}$ pri čemu je „+“ kraj sa gornje strane zato što struja I_4 ulazi sa gornje strane u otpornik R_{34} . Kako su otpornici R_2 i R_{34} vezani paralelno, napon na njima je isti, pa je $U_2 = U_{34}$. Opet primenom Omovog zakona na otpornik R_2 možemo odrediti i smer i jačinu struje I_2 , pri čemu je $I_2 = 2 \text{ A}$. Obzirom da se gornji kraj otpornika R_2 na višem potencijalu struja I_2 mora imati smer na dole. Na kraju u šemi (b) možemo da primenimo prvi Kirhofov zakon za čvor A. Ako pretpostavimo da je smer struje I_1 prema čvoru A, sledi da je $I_1 = I_2 + I_3 = 4 \text{ A}$. Pozitivna vrednost izračunate struje nam ukazuje da je pretpostavljeni smer struje ujedno i pravi smer struje u kolu.

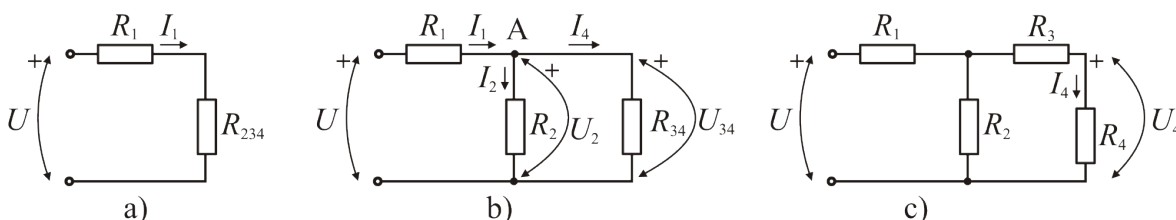
Sada možemo šemu da pojednostavimo zamenom otpornika R_2 i R_{34} jednim ekvivalentnim otpornikom $R_{234} = 125 \Omega$ čime se dobija šema (c). Na toj šemi su otpornici R_1 i R_{234} vezani redno pri čemu kroz oba otpornika protiče struja I_1 . Zamenom ova dva otpornika jednim otpornikom i primenom Omovog zakona nalazimo napon $U = R_{1234} \cdot I_1 = 225 \cdot 4 = 900 \text{ V}$. ■

Primer 3.17

Na slici je prikazana mešovita veza otpornika otpornosti $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 250 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$ i $R_4 = 50 \Omega$. Ako je napon $U = 450 \text{ V}$ odrediti napon U_4 .



Rešenje. Primenjujući pravilo za određivanje ekvivalentne otpornosti električnu šemu možemo da svedemo na rednu vezu otpornika R_1 i ekvivalentnog otpornika R_{234} .



Jačina struje $I_1 = U / (R_1 + R_{234})$ i iznosi 2 A u naznačenom smeru. Napon na otporniku R_{234} je $U_{234} = I_1 R_{234}$ i iznosi 250 V . Kako su R_2 i R_{34} vezani paralelno, taj napon je jednak naponima na otpornicima R_2 i R_{34} . Jačina struje $I_4 = U_{34} / R_{34}$ i iznosi 1 A . Kako su otpornici R_3 i R_4 vezani redno, kroz njih protiče ista struja. Na kraju napon na otporniku R_4 je $U_4 = R_4 I_4$ i iznosi 50 V . ■

3.11. Džulov zakon

Poznato je da se provodnici kroz koje protiče električna struja zagrevaju. To znači da se oslobađa toplotna energija. Kako energija ne može da se stvori niti uništi, to znači da je došlo do pretvaranja električne energije u toplotnu. Efekat električne struje da prouzrokuje toplotu je Džulov efekat. Električna energija koja se pretvori u toplotnu predstavlja gubitak energije

električnog sistema zato što je napustila električni sistem. Ekseprimentalno je utvrđeno da je količina disipirane (izgubljene) energije koju stvara električna struja direktno proporcionalna kvadratu jačine struje i vremenu za koje ona protiče. Konstanta proporcionalnosti je otpornost provodnika. Energija Džulovih gubitaka se određuje pomoću izraza

$$W_J = R \cdot I^2 \cdot t, \quad (3.9)$$

gde je R otpornost, I jačina struje a t vreme u sekundama. Jedinica za energiju je džul (J).

U situacijama kada se provodnici (žice, kablovi) koriste za prenos električne energije zagrevanje provodnika je nepoželjno. Kod sijalica sa užarenim vlaknom pretvaranje električne energije u svetlosnu je praćeno i velikom količinom oslobođene toplotne energije koja predstavlja čist gubitak. U električnim uređajima se svi električni elementi kroz koje protiče struja zagrevaju. Ukoliko svrha tog uređaja nije zagrevanje ambijenta tada sva ta oslobođena toplotna energija predstavlja gubitke.

Snaga je brzina kojom se energija transformiše iz jednog oblika u drugi i određuje se kao količnik energije i vremena, $P = W/t$. Snaga Džulovih gubitaka predstavlja brzinu kojom se električna energija pretvara u toplotnu i može da se odredi deljem izraza (3.9) sa vremenom t . Prema tome snaga Džulovih gubitaka provodnika otpornosti R sa strujom jačine I je jednaka

$$P_J = R \cdot I^2. \quad (3.10)$$

Jedinica za snagu je vat (W). Kombinujući Džulov zakon sa Omovim zakonom može se dobiti alternativni izraz za snagu

$$P_J = U^2/R \quad (3.11)$$

Primer 3.18

Ako se grejač otpornosti $200 \, \Omega$ priključi na napon $100 \, \text{V}$ i ostavi da radi 3 sata odrediti električnu energiju koja se pretvori u toplotnu.

Rešenje. Snaga grejača je $P_J = U^2/R = 50 \, \text{W}$. Energija Džulovih gubitaka je $W_J = P \cdot t$. Zamenom brojnih vrednosti dobija se $W_J = 50 \cdot 3 \cdot 3600 = 540000 \, \text{Ws}$ odnosno $540 \, \text{kJ}$. ■

Primer 3.19

Odrediti koliko 1 kWh ima džula.

Rešenje. $1 \, \text{kWh} = 1000 \, \text{W} \times 3600 \, \text{s} = 3600000 \, \text{J} = 3 \, \text{MJ}$ ■

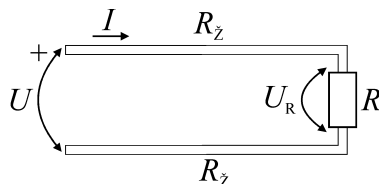
Primer 3.20

Ako grejač priključen na napon 220 za 3 sata potroši $6 \, \text{kWh}$ električne energije odrediti snagu i otpornost grejača.

Rešenje. Energija Džulovih gubitaka je $W_J = 6 \, \text{kWh}$. Snagu Džulovih gubitaka možemo odrediti i korišćenjem alternativnih jedinica ne prebacujući ih u džule i sekunde. Tako da je $P_J = W_J/t = 6 \, \text{kWh} / 3 \, \text{h} = 2 \, \text{kW}$. Otpornost grejača je $R = U^2/P_J = 24,2 \, \Omega$. ■

Primer 3.21

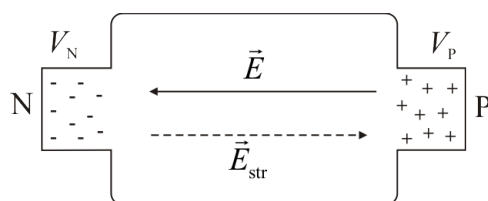
Za napajanje prijemnika otpornosti $R = 100 \, \Omega$ uotrebljen je dvožični kabel dužine 200 m. Žice u kablju su od bakra specifične otpornosti $1,68 \cdot 10^{-8} \, \Omega \text{m}$ i površine poprečnog preseka $1,0 \, \text{mm}^2$. Ako je prijemnik preko kabela priključen na napon 220 V, izračunati jačinu struje kroz kabel, snagu Džulovih gubitaka prijemnika i žica za povezivanje.



Rešenje. Otpornost jedne žice u kablju je $R_z = 3,36 \, \Omega$. Ukupna otpornost redne veze dve žice i prijemnika je $R_{\text{ekv}} = 106,72 \, \Omega$. Jačine struja je $I = U/R_{\text{ekv}} = 2,06 \, \text{A}$. Snaga prijemnika je prema Džulovom zakonu $P_R = R \cdot I^2 = 424,36 \, \text{W}$, dok je snaga žica za povezivanje $P_z = R_z \cdot I^2 = 14,26 \, \text{W}$. Da je otpornost kabela za povezivanje zanemarena, $R_z \approx 0$, napon na prijemniku bio bi jednak naponu na početku kabela. Tada bi snaga prijemnika bila $P_p = U^2/R = 484 \, \text{W}$. Zbog otpornosti kabela za povezivanje, na samom prijemniku je snaga manja za 59,64 W ili 12,4 %. Drugim rečima izgubljena je snaga na provodnicima za povezivanje, odnosno provodnicima za prenos električne energije. ■

3.12. Naponski generator i snaga generatora

U odeljku 3.2 smo videli da su električni generatori uređaji koji pretvaraju neku drugu vrstu energije (mehaničku, hemijsku, solarnu, energiju vetra) u električnu energiju. Zadatak im je da održavaju razdvojena pozitivna i negativna naelektrisanja na svojim priključcima. Na slici 3.23 su ti priključci obeleženi slovima P i N. Na taj način između priključaka generatora postoji razlika potencijala, odnosno napon $U_{\text{PN}} = V_P - V_N$. Razdvojena naelektrisanja stvaraju električno polje $\vec{E}$ unutar generatora koje deluje na ta ista naelektrisanja želeći da ih spoji. Međutim, u samom generatoru postoje strane sile koje održavaju ta naelektrisanja razdvojenim.

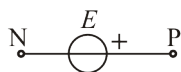


3.23 Električno polje i razdvojena naelektrisanja u električnom generatoru.

Napon U_{PN} na krajevima generatora postoji zahvaljujući upravo tim stranim silama koji drže ceo sistem u ravnoteži, $E = E_{\text{str}}$. Napon U_{PN} između priključaka generatora je nazvan elektromotorna sila električnog generatora ili skraćeno ems. Ems generatora se obeležava slovom E , a jedinica za ems je volt (V). Prema tome sledi da je

$$E = U_{\text{PN}}.$$

Ems je skalarna veličina ali je ipak uveden pojam smera ems. To je smer stranog električnog polja koje prenosi pozitivna naelektrisanja od N ka P priključku generatora. Simbol ems je prikazan na slici 3.24.



3.24 Simbol elektromotorne sile električnog izvora.

Kada se na generator priključi prijemnik, koji je od provodnog materijala, tada naelektrisanja počinju da se kreću kroz prijemnik. Pozitivna naelektrisanja sa P priključka počinju da se kreću kroz prijemnik ka N priključku. Negativna naelektrisanja sa N priključka počinju da se kreću kroz prijemnik ka P priključku. Tako pristigla naelektrisanja generator svojim stranim (neelektričnim) silama ponovo razdvaja, održavajući konstantan napon na svojim priključcima. Zbog toga se ovakvi generatori zovu naponski generatori.

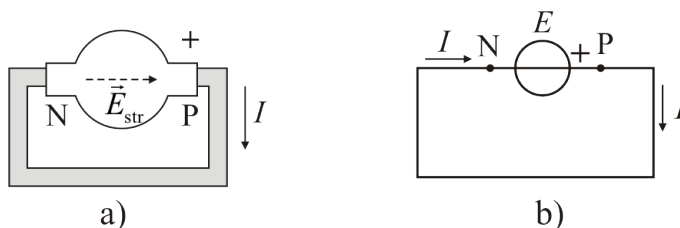
Prilikom prenošenja (razdvajanja) naelektrisanja unutar generatora, sam generator vrši rad. Taj rad je srazmeran proizvodu količine naelektrisanja koja se prenese i napona:

$$\Delta A = \Delta Q \cdot U_{PN} = \Delta Q \cdot E.$$

Ako znamo da se ukupna količina naelektrisanja, koja protekne kroz poprečni presek provodnika u vremenskom intervalu Δt , računa kao $\Delta Q = I \cdot \Delta t$, te da je snaga srazmerna promeni energije u jedinici vremena, dolazimo sledećeg zaključka: snaga izvora je jednaka proizvodu ems izvora i jačine struje kroz generator.

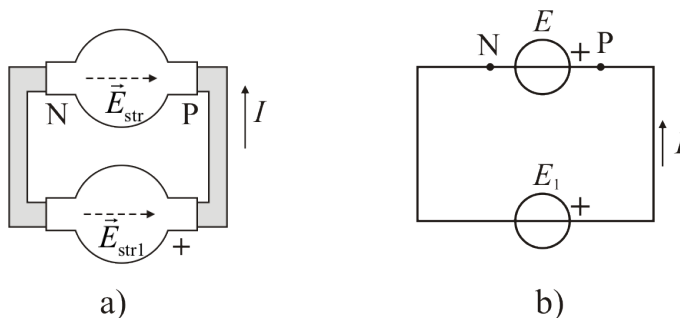
$$P_i = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \cdot E}{\Delta t} = E \cdot I \quad (3.12)$$

Pri tome je smer struje unutar generatora od N ka P kao što je prikazano na slici 3.25.



3.25 a) Provodnik priključen na električni generator i smer struje pražnjenja generatora, b) električna šema.

Ukoliko je iz nekog razloga smer struje kroz generator od P ka N tada se takav generator ponaša kao prijemnik. Na primer, kada želimo da napunimo prazan akumulator ili punjivu bateriju, tada moramo da upotrebimo drugi električni izvor ems E_1 koji moramo da povežemo na način prikazan na slici 3.26.

3.26 a) Električni generator ems E priključen tako da radi kao prijemnik i smer struje punjenja generatora, b) električna šema.

Smer struje kroz generator ems E je od P ka N. U tom slučaju snaga tog generatora se računa prema izrazu

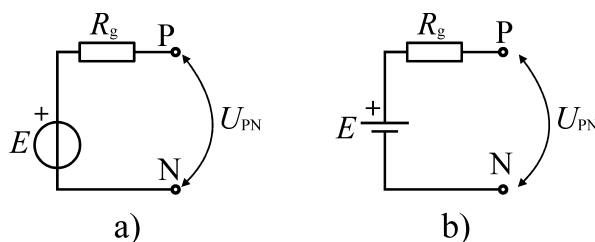
$$P_i = -\frac{\Delta A}{\Delta t} = -\frac{\Delta Q \cdot E}{\Delta t} = -E \cdot I. \quad (3.13)$$

Naelektrisanja, koja strane sile prenose unutar generatora, nailaze na otpor prilikom kretanja. Taj otpor pružaju atomi i molekuli unutar generatora. To znači da osim ems, E , naponski generatori imaju i unutrašnju otpornost koja se obično obeležava sa R_g . Kretanje naelektrisanja unutar izvora izaziva zagrevanje izvora u skladu sa Džulovim zakonom. Snaga Džulovih gubitaka na unutrašnjoj otpornosti generatora je

$$P_g = R_g \cdot I^2. \quad (3.14)$$

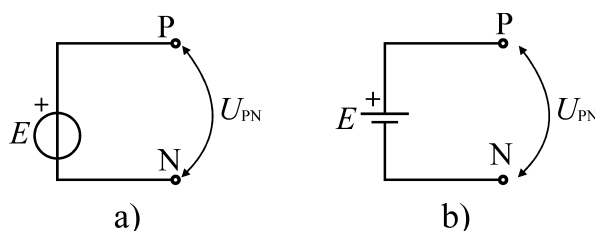
Energija koju generator predaje električnom kolu predstavlja razliku proizvede energije i energije Džulovih gubitaka na unutrašnjoj otpornosti generatora. Iz tog razloga se teži da se naprave generatori sa što manjom unutrašnjom otpornošću. Idealni naponski generatori su generatori koji nemaju unutrašnju otpornost.

Šematsko označavanje naponskog generatora dato je na slici 3.27. Iako je unutrašnja otpornost generatora sastavni deo generatora ona se u električnim šemama, radi lakše analize, crta izdvojeno kao redna veza otpornika R_g . Crta kroz simbol na slici 3.27.a simbolično označava generator koji nema unutrašnju otpornost, odnosno da je idealan. Znak (+) označava priključak generatora koji je na višem potencijalu, $V_P > V_N$.



3.27 Šematsko označavanje naponskog generatora:
a) za bilo koji tip električnog izvora, b) za elektrohemijski izvor (baterija).

Kada je unutrašnja otpornost naponskog generatora mnogo manja u odnosu na otpornost ostalih prijemnika u električnom kolu, tada se ona može zanemariti, a realni naponski generator može da se zameni idealnim. Simbol idealnog naponskog generatora je prikazan na slici 3.28.



3.28 Grafički simbol idealnog naponskog generatora:
a) za bilo koji tip električnog izvora, b) za elektrohemijski izvor (baterija).

3.13. Teorema održanja snage

Električni generatori pretvaraju drugu vrstu energije u električnu. Dakle, generatori stvaraju električnu energiju. Sa druge strane, prijemnici su uređaji koji električnu energiju pretvaraju u neku drugu (toplotnu, svetlosnu, mehaničku, ...). Može da se kaže da prijemnici primaju i troše električnu energiju. Električno kolo je zatvoren sistem u kome može biti više

generatora i više prijemnika. U svakom električnom kolu važi da je proizvedena električna energija u tom kolu jednaka potrošenoj električnoj energiji u tom istom kolu, odnosno važi da je

$$W_{\text{proizvedeno}} = W_{\text{potrošeno}}.$$

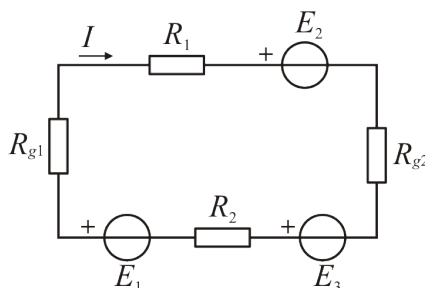
Deljenjem gornje jednakosti sa vremenom dobija se jednakost snage. Teorema održanja snage kaže da je ukupna snaga svih generatora u nekom električnom kolu jednaka ukupnoj snazi svih prijemnika u tom električnom kolu. Ako sa P_i označimo snagu izvora jednog od M generatora u kolu, a sa P_p označimo sagu Džulovih gubitaka na jednom od N prijemnika u kolu, tada matematička formulacija teoreme glasi:

$$\sum_{m=1}^M P_{im} = \sum_{n=1}^N P_{pn}. \quad (3.15)$$

U električnim kolima može da se dogodi da pojedini generatori rade kao prijemnici, pogledati 3.12. U tom slučaju je njihova snaga negativna. Prilikom računanja ukupne snage generatora, u izrazu (3.15) za sve generatore koji rade kao prijemnici je potrebno uvrstiti snagu sa negativnim predznakom. Džulovi gubici postoje na prijemnicima, provodnicima i na unutrašnjim otpornostima naponskih generatora.

Primer 3.22

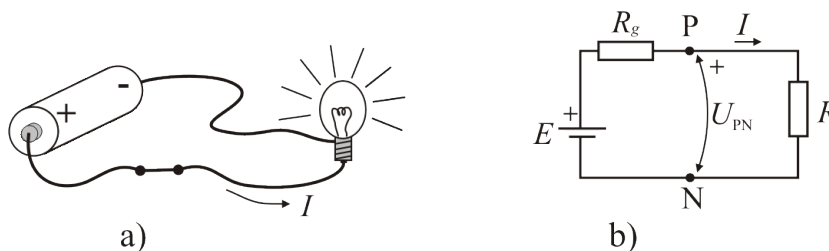
Izračunati snage svih generatora i svih prijemnika u električnom kolu prikazanom na slici i potvrditi zakon o održanju snage ako je $R_1 = 140 \, \Omega$, $R_2 = 250 \, \Omega$, $R_{g1} = 6 \, \Omega$, $R_{g2} = 4 \, \Omega$, $E_1 = 100 \, \text{V}$, $E_2 = 50 \, \text{V}$, $E_3 = 150 \, \text{V}$ a struja $I = 0,5 \, \text{A}$ u zadatom smeru.



Rešenje. Kod generatora ems E_1 i E_3 smer struje je takav da ona izlazi iz „+“ kraja generatora. To su generatori koji proizvode električnu energiju pa je njihova snaga pozitivna: $P_{i1} = E_1 \cdot I = 50 \, \text{W}$ i $P_{i3} = E_3 \cdot I = 75 \, \text{W}$. U slučaju generatora ems E_2 struja ulazi u „+“ kraj generatora. Takav generator se ponaša kao prijemnik, tako da je njegova snaga negativna: $P_{i2} = -E_2 \cdot I = -25 \, \text{W}$. Ukupna snaga koja se generiše u kolu se računa kao zbir snaga svih generatora: $P_{\text{gen}} = P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} = 50 - 25 + 75 = 100 \, \text{W}$. Sa druge strane na svakom prijemniku se troši električna energija a snaga se računa po Džulovom zakonu: $P_{p1} = R_1 \cdot I^2 = 35 \, \text{W}$, $P_{p2} = R_2 \cdot I^2 = 62,5 \, \text{W}$. Električna energija se troši i na unutrašnjim otpornostima generatora, tako da se i oni mogu posmatrati kao prijemnici električne energije: $P_{p3} = R_{g1} \cdot I^2 = 1,5 \, \text{W}$ i $P_{p4} = R_{g2} \cdot I^2 = 1 \, \text{W}$. Ukupna snaga koja se troši na prijemnicima izosi $P_{\text{prijemnika}} = P_{p1} + P_{p2} + P_{p3} + P_{p4} = 35 + 62,5 + 1,5 + 1 = 100 \, \text{W}$. Vidimo da je ukupna proizvedena snaga jednaka ukupnoj snazi Džulovih gubitaka. ■

3.14. Prosto električno kolo

Primer prostog električnog kola sa jednim generatorom i jednim prijemnikom je baterijska lampa. To kolo se sastoji od električnog generatora (baterije), sijalice, žica za povezivanje i prekidača, kao što je to ilustrovano na slici 3.29.a.



3.29 a) Prosto električno kolo baterijske lampe i b) električna šema ovog električnog kola.

Na slici 3.29.b prikazana je električna šema baterijske lampe. U kolima vremenski konstantnih struja, jedna od najvažnijih karakteristika prijemnika je njegova otpornost. U primeru prikazanom na slici 3.29 baterijska lampa koristi sijalicu sa provodnim vlaknom koja pruža otpornost pa je zato sijalica na šematskom prikazu predstavljena otpornikom.

Kao što je već ranije rečeno, žice za povezivanje se izrađuju od provodnih materijala koji imaju jako malu specifičnu otpornost tako da je i njihova otpornost mnogo manja od otpornosti ostalih elemenata u kolu. U analizi električnih kola ćemo smatrati da su žice idealne (da nemaju otpornost, odnosno da se na njima ne gubi energija). Praktično to znači da njihova dužina ne utiče na jačinu struje u kolu. Zbog toga je po zakonu o održanju energije snaga koju proizvede generator jednaka snazi Džulovih gubitaka u generatoru i na prijemniku, pa je

$$EI = R_g I^2 + RI^2.$$

Deljenjem leve i desne strane jednačine sa I dobija se

$$E = R_g I + RI,$$

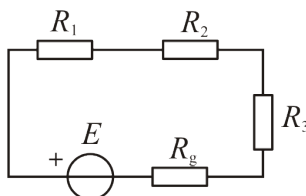
odakle je jačina struje u prostom električnom kolu sa jednim generatorom ems E , unutrašnje otpornosti R_g i jednim prijemnikom otpornosti R jednaka:

$$I = \frac{E}{R_g + R}. \quad (3.16)$$

Prosto električno kolo može da sadrži i više od jednog otpornika. Pri tome ti otpornici mogu da budu vezani redno, paralelno ili mešovito. U takvim kolima se najpre grupa otpornika zameni ekvivalentnim otpornikom, tako da kolo postane prosto. Nakon toga jačina struje kroz generator može da se odredi na prethodno opisan način. Struje i naponi na pojedinačnim otpornicima mogu da se odrede naknadno primenjujući Omov zakon. U sledećim primerima je ilustrovana primena Omovog zakona u prostom električnom kolu.

Primer 3.23

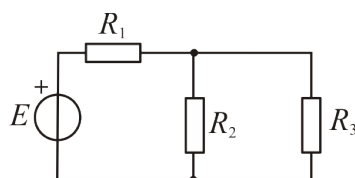
U kolu prikazanom na slici odrediti snagu generatora i snage svih otpornika. $R_1 = 40 \, \Omega$, $R_2 = 50 \, \Omega$, $R_3 = 68 \, \Omega$, $R_g = 2 \, \Omega$, $E = 80 \, \text{V}$.



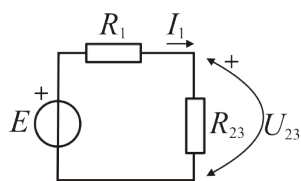
Rešenje. Redna veza tri otpornika iznosi $R_e = 158 \Omega$. Smer struje u kolu je od „+“ ka „-“ kraju ems E , odnosno u smeru kazaljke na satu. Prema izrazu (3.16), jačina struje je $I = 0,5 \text{ A}$. Snaga generatora je $P_E = EI = 40 \text{ W}$. Snage otpornika su: $P_1 = R_1 I^2 = 10 \text{ W}$, $P_2 = 12,5 \text{ W}$, $P_3 = 17 \text{ W}$, i $P_{R_g} = 0,5 \text{ W}$. Zbir snaga na svim otpornicima je jednak snazi generatora, što je u skladu sa teoremom o održanju snage. ■

Primer 3.24

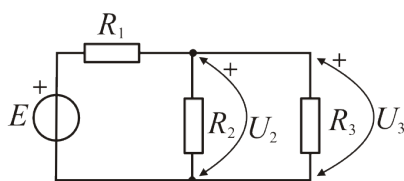
Izračunati snage svih otpornika i generatora u kolu prikazanom na slici ako je $E = 12 \text{ V}$, $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$ i $R_3 = 20 \Omega$.



Rešenje. Kolo prikazano na gornjoj slici nije prosto kolo. Međutim otpornici R_1 i R_2 su vezani paralelno i možemo da ih zamenimo jednim otpornikom otpornosti $R_{23} = 12 \Omega$. Na taj način dobijamo ekvivalentno kolo prikazano na sledećoj slici pod (a). Jačina struje je $I_1 = E / (R_1 + R_{23}) = 0,6 \text{ A}$, tako da je snaga generatora $P_E = E \cdot I_1 = 7,2 \text{ W}$. Struja I_1 ne prolazi ni kroz R_2 ni kroz R_3 , tako da snagu tih otpornika moramo naći na drugi način. Kako su otpornici vezani paralelno naponi na njima su jednaki $U_2 = U_3$, a jednaki su i sa naponom U_{23} koji se nalazi primenom Omovog zakona, $U_{23} = R_{23} \cdot I = 7,2 \text{ V}$. Snage otpornika R_2 i R_3 nalazimo na sledeći način: $P_2 = U_2^2 / R_2 = 1,728 \text{ W}$ i $P_3 = U_3^2 / R_3 = 2,592 \text{ W}$. Snaga otpornika R_1 je $P_1 = R_1 \cdot I_1^2 = 2,88 \text{ W}$. Poredeći izračunate snage možemo da primetimo da je teorema održanja snage zadovoljena: $P_E = P_1 + P_2 + P_3$. ■



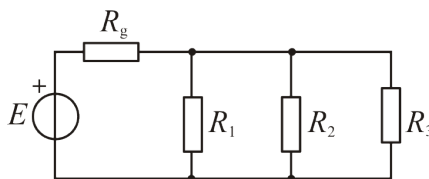
a)



b)

Primer 3.25

U kolu prikazanom na slici odrediti snagu generatora i snage svih otpornika. $R_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 68 \Omega$, $R_g = 2 \Omega$, $E = 80 \text{ V}$.

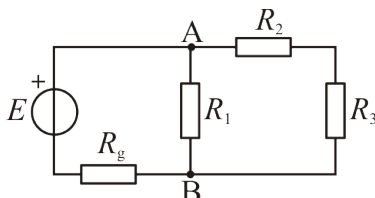


Rešenje. Paralelna veza tri otpornika iznosi $R_e = 16,75 \Omega$. Jačina struje je $I = 4,27 \text{ A}$. Snaga generatora je $P_E = 341,6 \text{ W}$. Snaga Džulovih gubitaka na unutrašnjoj otpornosti R_g je

$P_{R_g} = 36,4\text{W}$. Napon na ekvivalentnom otporniku je $U = R_e I = 71,5\text{ V}$. Snage otpornika su: $P_1 = U^2/R_1 = 127,8\text{W}$, $P_2 = 102,3\text{W}$, $P_3 = 75,2\text{W}$. Zbir snaga na svim otpornicima je $341,7\text{W}$ i malo se razlikuje od snage generatora. U skladu sa teoremom o održanju snage, snaga na otpornicima je jednaka snazi na generatoru. Razlika je nastala zbog zaokruživanja decimalnih brojeva. ■

Primer 3.26

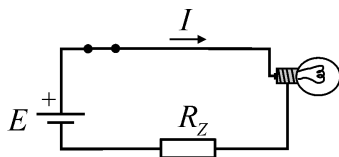
U kolu prikazanom na slici odrediti snagu generatora i snage svih otpornika. $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$, $R_g = 2\ \Omega$, $E = 80\text{ V}$.



Rešenje. Otpornost ekvivalentnog otpornika kojim mogu da se zamene otpornici R_1 , R_2 , i R_3 , iznosi $R_e = 50\ \Omega$. Jačina struje u ekvivalentnom prostom električnom kolu iznosi $I = 80/52 = 1,54\text{A}$. Snaga generatora je $P_E = 123,2\text{W}$. Snaga Džulovih gubitaka na unutrašnjoj otpornosti je $P_{R_g} = 4,7\text{W}$. Napon između tačaka A i B odgovara naponu na ekvivalentnoj otpornosti, $U = R_e I = 77\text{ V}$. Snaga otpornika R_1 je: $P_1 = U^2/R_1 = 59,3\text{W}$. Struja kroz otpornike R_2 i R_3 je prema Omovom zakonu $I_{23} = 77/(40 + 60) = 0,77\text{A}$. Snage otpornika su: $P_2 = R_2 I_{23}^2 = 23,7\text{W}$, $P_3 = 35,6\text{W}$. Ukupna snaga gubitaka je $123,3\text{W}$. Ovo malo neslaganje sa P_E je nastalo zbog zaokruživanja decimalnih brojeva.

Primer 3.27

Izračunati otpornost i snagu zaštitnog otpornika koji treba da obezbedi da napon na sijalici ne bude veći od 6 V . Otpornost sijalice je $12\ \Omega$ a ems idealnog naponskog generatora je 12 V .



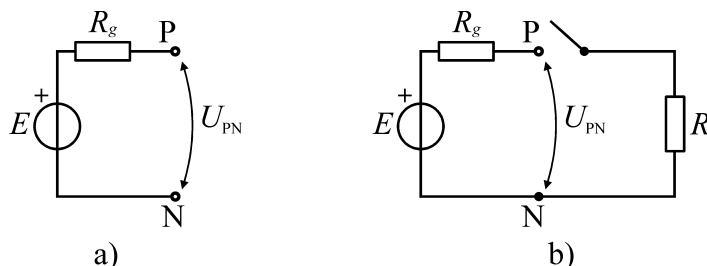
Rešenje. Jačina struje $I = E/(R_s + R_Z)$, pri čemu je R_s otpornost sijalice. Sa druge strane na osnovu Omovog zakona ta jačina struje je jednaka $I = U_s/R_s = 0,5\text{A}$, gde je U_s napon sijalice. Sređivanjem prvog izraza dobija se da je otpornost zaštitnog otpornika jednaka $R_Z = E/I - R_s = 12\ \Omega$, a snaga $P_Z = R_Z \cdot I^2 = 3\text{W}$. ■

3.15. Režimi rada naponskog generatora

U ovom odeljku ćemo odrediti napon na priključcima naponskog generatora u zavisnosti od režima rada generatora. Videćemo kada i kako taj napon zavisi od otpornosti prijemnika a kada od unutrašnje otpornosti generatora. Takođe ćemo se upoznati sa pojmom idealnog naponskog generatora i videti u čemu je razlika između realnog i idealnog naponskog generatora.

3.15.1. Prazan hod

Na slici 3.30.a je prikazana električna šema naponskog generatora u režimu praznog hoda. To je režim u kome prijemnik nije priključen na generator. Na slici 3.30.b je takođe prikazan generator u režimu praznog hoda gde je prijemnik, preko otvorenog prekidača, odvojen od generatora.



3.30 Realni naponski generator u režimu praznog hoda.

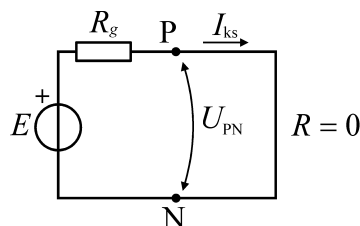
U oba slučaja je jačina struje kroz generator jednaka nuli ($I = 0$). Zbog toga je i napon na unutrašnjoj otpornosti generatora jednak nuli ($R_g I = 0$). U oba slučaja je napon praznog hoda između P i N priključka generatora jednak ems generatora, odnosno

$$U_{PN}^{\text{ph}} = E. \quad (3.17)$$

U ovom režimu rada nema kretanja naelektrisanja kroz generator. Generator ne mora da razdvaja naelektrisanja budući da se ona i ne pomeraju. To znači da generator ne vrši rad niti vrši pretvaranje neke druge energije u električnu. Snaga generatora je prema tome jednaka nuli, $P_i = 0$.

3.15.2. Kratak spoj

Kada se priključci naponskog generatora spoje provodnikom zanemarljive otpornosti (teoretski jednake nuli) tada je generator u režimu kratkog spoja. Na slici 3.31 je prikazana električna šema naponskog generatora u ovom režimu.



3.31 Realni naponski generator u režimu kratkog spoja.

Ako je otpornost provodnika jednaka nuli tada je po Omovom zakonu i napon između priključaka P i N u režimu kratkog spoja jednak nuli,

$$U_{PN}^{\text{ks}} = 0. \quad (3.18)$$

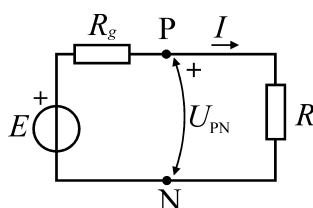
U ovom režimu pozitivna naelektrisanja sa P priključka veoma lako i brzo stižu do N priključka. Isto važi i za negativna naelektrisanja koja sa N priključka kroz provodnik veoma brzo stižu do P priključka. Velika brzina kretanja naelektrisanja znači da kroz generator i provodnik protiče struja velike jačine. Ta struja se zove struja kratkog spoja, I_{ks} , zato što provodnik zanemarljive otpornosti spaja priključke P i N dovodeći ih praktično na isti potencijal. To je ujedno i najveća jačina struje kroz generator. Uvrštavanjem $R = 0$ u izraz (3.16) dobija se da je

$$I_{ks} = \frac{E}{R_g}. \quad (3.19)$$

Generator mora da veoma brzo razdvoji veliku količinu pristiglih naelektrisanja kako bi održao stalnu količinu naelektrisanja na P i N priključcima. To znači da mu je i snaga u tom režimu veoma velika. U ovom režimu rada sva energija koju proizvede generator se troši isključivo na Džulovim gubicima unutar samog generatora. Snaga izvora je $P_i = E \cdot I_{ks}$ dok je snaga Džulovih gubitaka na unutrašnjoj otpornosti generatora $P_g = R_g I_{ks}^2$. Pri tome je $P_i = P_g$.

3.15.3. Režim opterećenja

Kada se na naponski generator priključi prijemnik, tada kažemo da je generator u režimu opterećenja. Generator je opterećen prijemnikom. Električna šema opterećenog generatora je prikazana na slici 3.32.



3.32 Realni naponski generator u režimu opterećenja.

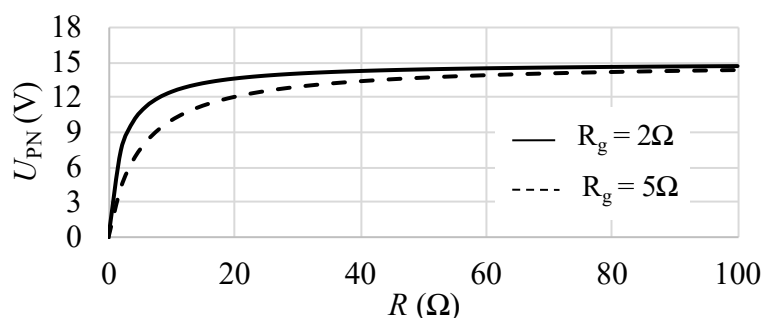
Napon između P i N priključka generatora je jednak naponu na prijemniku. Na osnovu Omovog zakona je $U_{PN} = R \cdot I$. Imajući u vidu izlaganje u prethodnom poglavlju i izraz **Error! Reference source not found.**, sledi da je napon

$$U_{PN} = RI = E - R_g I. \quad (3.20)$$

Iz ovog izraza se vidi da je napon na priključcima realnog naponskog generatora uvek manji od njegove elektromotorne sile $U_{PN} < E$. Napon je umanjen za vrednost napona na otporniku koji predstavlja unutrašnju otpornost generatora. Ako se u izraz (3.20) za jačinu struje I iskoristi izraz (3.16) dobija se da je

$$U_{PN} = R \frac{E}{R_g + R}. \quad (3.21)$$

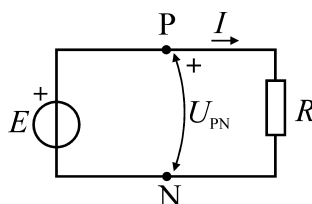
Ovo je veoma koristan izraz koji nam kazuje da napon na priključcima realnog naponskog generatora zavisi, kako od njegove ems i unutrašnje otpornosti, tako i od otpornosti priključenog prijemnika. Ako se otpornost prijemnika smanjuje, smanjuje se i napon U_{PN} . Ako se unutrašnja otpornost generatora povećava, U_{PN} se dodatno smanjuje, kao što je ilustrovano na slici 3.33. Ova pojava nije poželjna u električnim kolima tako da se u praksi teži da se napravi generator sa što manjom unutrašnjom otpornošću. Mnogo manjom od otpornosti ostalih elemenata u električnim kolima.



3.33 Napon na priključcima realnog naponskog generatora u režimu opterećenja pri $E = 15V$.

Snaga električnog izvora je $P_i = EI$, dok su snage Džulovih gubitaka na unutrašnjoj otpornosti generatora R_g i prijemniku R jednake: $P_g = R_g I^2$ i $P_p = RI^2$. Prema teoremi održanja snage sledi da je $P_i = P_g + P_p$.

Na slici 3.34 je prikazano prosto električno kolo u kome je unutrašnja otpornost generatora jednaka nuli, $R_g = 0$.



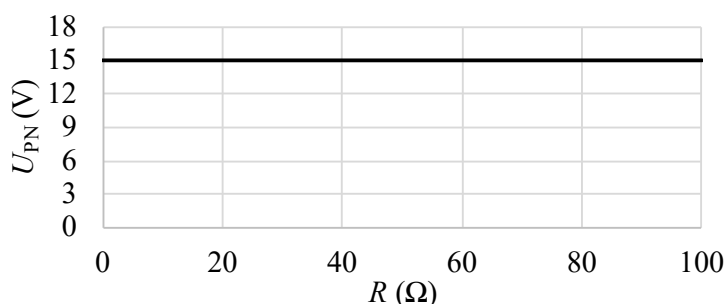
3.34 Idealan naponski generator u režimu opterećenja.

U tom slučaju kažemo da je naponski generator idealan. Kod idealnog naponskog generatora napon na njegovim priključcima je uvek jednak elektromotornoj sili, bez obzira na otpornost prijemnika:

$$U_{PN} = E, \quad (3.22)$$

kao što je ilustrovano na grafiku prikazanom na slici 3.35. Snaga električnog izvora je $P_i = EI$, dok je snaga Džulovih gubitaka na prijemniku $P_p = RI^2$. Prema teoremi održanja snage sledi da je $P_i = P_p$. Jačina struje se određuje iz jednakosti snaga i iznosi

$$I = \frac{E}{R}. \quad (3.23)$$



3.35 Napon na priključcima idealnog naponskog generatora u režimu opterećenja pri $E = 15\text{ V}$.

Primer 3.28

Ako se prijemnik otpornosti $R = 20\ \Omega$ priključi na realan naponski generator ems $E = 2\text{ V}$, i unutrašnje otpornost $R_g = 1\ \Omega$, odrediti napon na prijemniku.

Rešenje. Kroz sve elemente u kolu protiče ista struja. Pri tome je $I = E/(R_g + R) = 0,095\text{ A}$. Napon na prijemniku je $U = RI = 1,9\text{ V}$. To je ujedno i napon na priključcima generatora, $U_{PN} = U$. Kod realnog naponskog generatora napon na njegovim priključcima (napon koji predaje ostatku kola) je manji od njegove ems. Kada bi unutrašnja otpornost generatora bila veća, npr $R_g = 5\ \Omega$, tada bi jačina struje bila manja ($I = 0,08\text{ A}$), a samim tim i napon na prijemniku bi bio manji ($U = 1,6\text{ V}$). ■

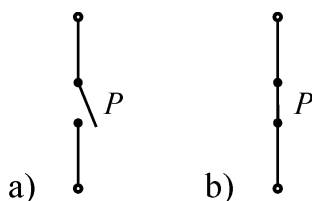
Primer 3.29

Ako se priključci realnog naponskog generatora, ems $E = 9\text{ V}$ i unutrašnje otpornost $R_g = 0,5\Omega$, kratko spoje, odrediti jačinu struje generatora i snagu Džulovih gubitaka u generatoru.

Rešenje. Jačina struje je $I = E / R_g = 18\text{ A}$. Snagu Džulovih gubitaka u generatoru je $P_g = R_g I^2 = 162\text{ W}$. Ovo je vrlo velika jačina struje. Ukoliko je provodnik kojim su prespojeni krajevi generatora tanak, on će, zbog prevelike jačine struje, pregoreti. Ukoliko je provodnik dovoljno debeo da izdrži tu jačinu struje, tada će se generator zagrevati srazmerno snazi P_g . ■

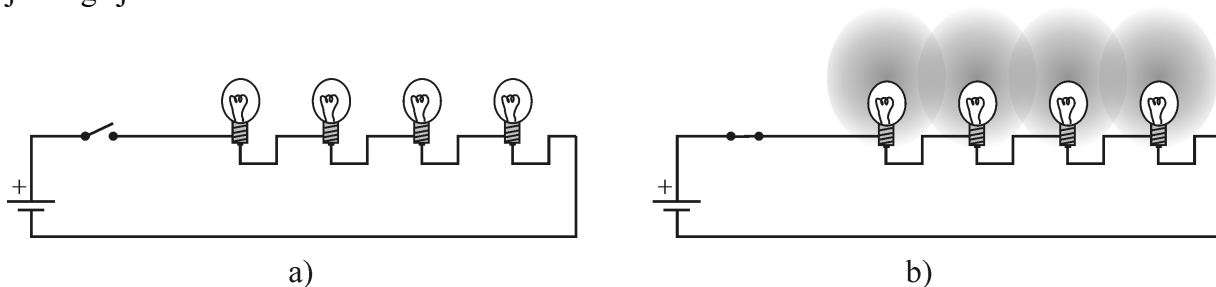
3.16. Kola sa prekidačima

U električnim kolima, osim generatora i otpornika, ima i prekidača. Prekidači mogu biti otvoreni ili zatvoreni. Simbol prekidača je prikazan na slici 3.36. Kada je prekidač otvoren tada je jačina struje kroz prekidač jednaka nuli. Kroz sve elemente koji su povezani redno sa otvorenim prekidačem struja je jednaka nuli. Kada se prekidač zatvori, on se ponaša kao deo žice za povezivanje, čija je otpornost jednaka nuli.



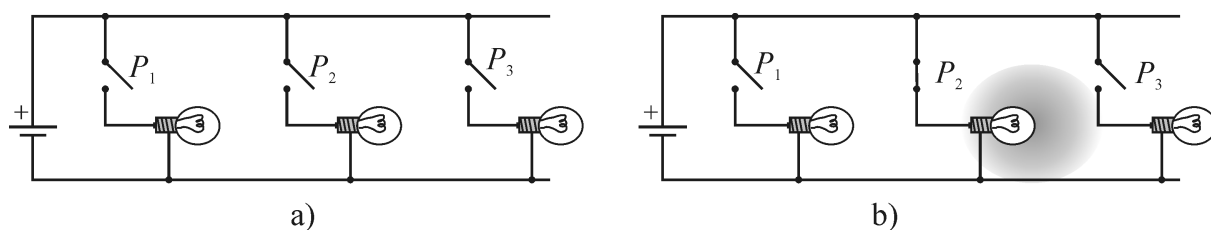
3.36 Simbol prekidača: a) otvoren i b) zatvoren.

Na slici 3.37.a. je prikazana redna veza prekidača i četiri sijalice. Nakon zatvaranja prekidača uspostavlja se struja kroz sve elemente koji su redno vezani sa prekidačem, tako da zatvaranjem prekidača sve sijalice počinju da sijaju, kao što se vidi na slici 3.37.b. Jačina struje je ista kroz sve sijalice tako da će najjače da svetli sijalica koja ima najveću otpornost, zato što je snaga jednaka $R \cdot I^2$.



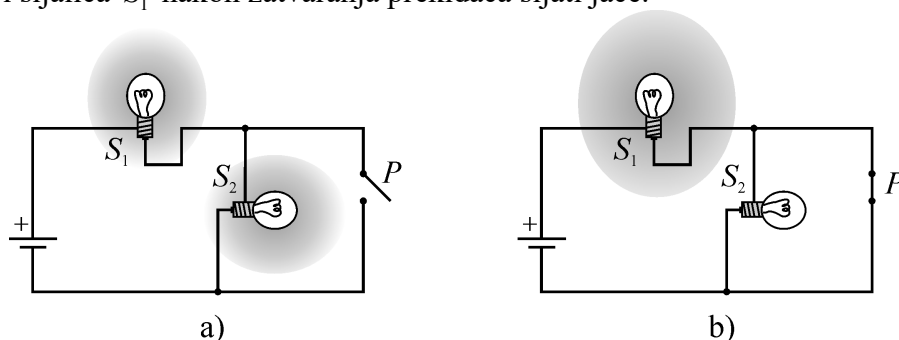
3.37 Prekidač i redna veza sijalica.

Na slici 3.38.a su prikazane 3 sijalice i 3 prekidača. Sijalice su povezane paralelno na generator. Nakon zatvaranja prekidača P_2 uspostavlja se struja samo kroz sijalicu koja je redno vezana sa prekidačem P_2 , kao što je prikazano na slici 3.38.b, dok su struje kroz ostale sijalice jednake nuli. Ako bi se zatvorili svi prekidači tada bi sve sijalice bile priključene na isti napon. Najače bi svetlela sijalica koja ima najmanju otpornost jer je snaga jednaka U^2/R .



3.38 Prekidač i paralelna veza sijalica.

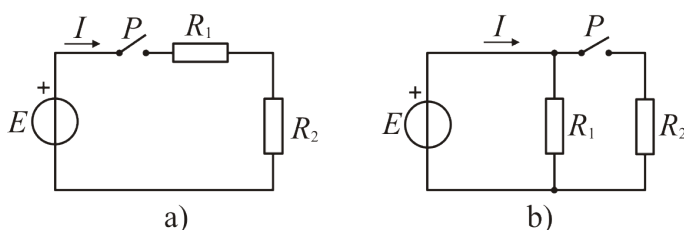
Prekidači se u električnim kolima priključuju redno sa elementima. Međutim u analizi električnih kola se prekidači ponekad vezuju paralelno sa elementom. Na slici 3.39.a su prikazane dve redno vezane sijalice, S_1 i S_2 , priključene na bateriju. Prekidač P je povezan paralelno sa sijalicom S_2 . Kada je prekidač otvoren struja prolazi kroz obe sijalice tako da obe sijaju. Nakon zatvaranja prekidača P sijalica S_2 prestaje da sija, slika 3.39.b. To je zato što se zatvoren prekidač ponaša kao žica za povezivanje. Struja ide linijom manjeg otpora a žica ima mnogo manji otpor od sijalice. U odnosu na ostale elemente u kolu, otpornost žice je praktično nula oma. Sada je ukupna otpornost koju „vidi“ generator manja, tako da je struja veća. To znači da će i sijalica S_1 nakon zatvaranja prekidača sijati jače.



3.39 Prekidač vezan paralelno sa sijalicom.

Primer 3.30

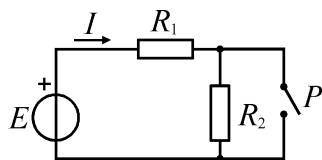
U kolima prikazanim na slikama (a) i (b) odrediti jačinu struje i snagu generatora pre i posle zatvaranja prekidača. $E = 20\text{ V}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$.



Rešenje. U kolu prikazanom na slici (a) pre zatvaranja prekidača struja je jednaka nuli i snaga generatora je jednaka nuli. Posle zatvaranja prekidača $I = E/(R_1 + R_2) = 0,5\text{ A}$, dok je snaga generatora $P_E = E \cdot I = 10\text{ W}$. U kolu na slici (b), pre zatvaranja prekidača $I = E/R_1 = 1\text{ A}$, $P_E = 20\text{ W}$. Nakon zatvaranja prekidača $R_e = 10\ \Omega$, $I = E/R_e = 2\text{ A}$, i $P_E = 40\text{ W}$. ■

Primer 3.31

U kolu prikazanom na slici odrediti snagu generatora i otpornika R_1 , pre i posle zatvaranja prekidača. $E = 20\text{ V}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$

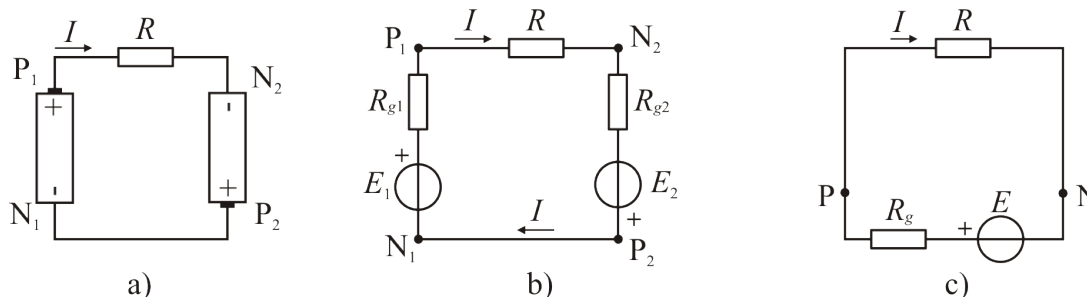


Rešenje. Pre zatvaranja prekidača $I = E / (R_1 + R_2) = 0,5 \text{ A}$, $P_E = 10 \text{ W}$ i $P_1 = R_1 I^2 = 5 \text{ W}$. Posle zatvaranja prekidača struja zaobilazi otpornik R_2 . Napon na njemu je nula, tako da je i struja kroz njega nula. Sva struja ide kroz zatvoreni prekidač, pa je $I = E / R_1 = 1 \text{ A}$, $P_E = 20 \text{ W}$, i $P_1 = 20 \text{ W}$. Snaga generatora se povećala 2 puta, a snaga otpornika R_1 četiri puta. ■

3.17. Prosto električno kolo sa više generatora

U prostom električnom kolu sa jednim generatorom i jednim prijemnikom jačina struje se određuje na način objašnjen u prethodnom odeljku. Pri tome je smer struje od pozitivnog priključka (P) prema negativnom priključku (N) generatora. U slučaju više prijemnika, oni se uvek mogu zameniti ekvivalentnim otpornikom. Međutim, postoje i prosta električna kola sa više naponskih generatora. Pri tome oni mogu biti vezani na dva načina. Prvi način je prikazan na slici 3.40.a a drugi na slici 3.41. U nastavku će biti razmotrena oba načina.

Rednom vezom više generatora moguće je dobiti veću ems. Pri tome generatori moraju biti povezani tako da je pozitivan priključak jednog generatora povezan na negativan priključak drugog generatora. Na slici 3.40.a je ilustrovan način povezivanja dve baterije i prijemnika, gde je pozitivan priključak P_2 desne baterije povezan na negativan priključak N_1 leve baterije. Na slici 3.40.b je prikazana električna šema ove veze.



3.40 a) Prosto električno kolo sa dva naponska generatora, b) električna šema i b) ekvivalentno električno kolo.

Kod redne veze elemenata jačina i smer struje je isti kroz sve elemente. Smer struje unutar oba generatora je od negativnog ka pozitivnom priključku tako da je prema izrazu (3.12) snaga ovih električnih izvora: $P_{i2} = E_2 I$ i $P_{i1} = E_1 I$. Ukupna snaga Džulovih gubitaka na prijemniku i unutrašnjim otpornostima je: $P_j = R_{g1} I^2 + R_{g2} I^2 + R I^2$. Ukupna snaga isvih izvora je jednaka ukupnoj snazi Džulovih gubitaka. Izjednačavajući zbir snaga $P_{i1} + P_{i2}$ izvora sa P_j i deljenjem obe strane sa strujom I dobija se jednakost:

$$E_1 + E_2 = (R_{g1} + R_{g2}) I + R I$$

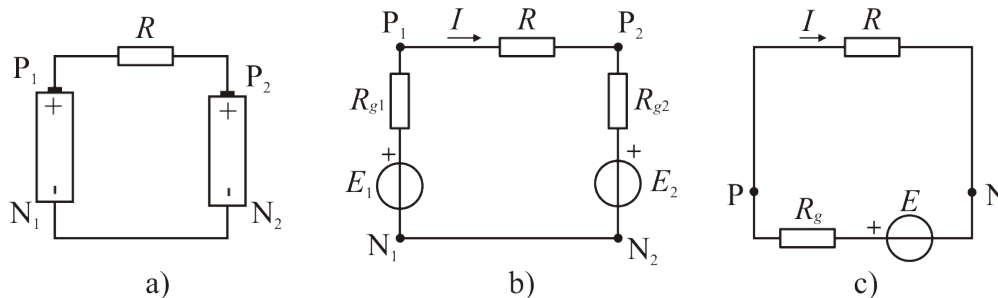
Sređivanjem ove jednakosti sledi da je jačina struje

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_{g1} + R_{g2} + R} = \frac{E}{R_g + R},$$

odakle se može zaključiti da se dva generatora redno vezana na način prikazan na slici 3.40.b mogu zameniti jednim generatorom prikazanim na slici 3.40.c. Pri tome je

$$E = E_1 + E_2 \quad \text{i} \quad R_g = R_{g1} + R_{g2}.$$

Na slici 3.41. a su baterije vezane u opoziciju. Pozitivan priključak leve baterije je povezan preko prijemnika na pozitivan priključak desne baterije. Odnosno, negativan priključak leve baterije je povezan na negativan priključak desne baterije. U ovakvom kolu jedan od generatora će se ponašati kao prijemnik. Umesto da stvara električnu energiju taj generator će trošiti električnu energiju. Električna šema ove veze je prikazana na slici 3.41. b i opisuje situaciju u kojoj se jedan generator prazni a drugi puni. Generator koji se prazni predaje električnu energiju u kolu. Generator koji se puni troši tu energiju. U praksi je to onaj generator koji ima manju ems.



3.41 a) Prosto električno kolo sa dva naponska generatora vezana u opoziciju, b) električna šema i c) ekvivalentno električno kolo.

Pretpostavimo da je $E_1 > E_2$. U tom slučaju smer struje u kolu je u smeru kazaljke na satu, kao što je označeno na slici 3.41. b. Generator ems E_1 proizvodi električnu energiju a smer struje unutar generatora je od N_1 ka P_1 , tako da je njegova snaga $P_{i1} = E_1 I$. Generator ems E_2 troši električnu energiju a smer struje unutar generatora je od P_2 ka N_2 , tako da je njegova snaga $P_{i2} = -E_2 I$. Ukupna snaga oba izvora je $P_i = (E_1 - E_2) I$. Ukupna snaga Džulovih gubitaka je $P_j = R_{g1} I^2 + R_{g2} I^2 + R I^2$. Izjednačavanjem snaga i deljenjem obe strane sa I sledi da je

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_{g1} + R_{g2} + R} = \frac{E}{R_g + R}$$

odakle se može zaključiti da se generatori prikazani na slici 3.41. b mogu zameniti jednim generatorom prikazanim na slici 3.41. c. Pri tome je

$$E = E_1 - E_2 \quad \text{i} \quad R_g = R_{g1} + R_{g2}.$$

Iz prethodna dva električna kola može da se izvede zaključak da se jačina struje u prostom električnom kolu sa više elemenata određuje pomoću izraza:

$$I = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{E_{ekv}}{R_{ekv}} \quad (3.24)$$

gde se prilikom sabiranja ems generatora piše predznak „+“ ako je usklađen smer ems i struje, a predznak „-“ ako nije usklađen smer ems i struje.

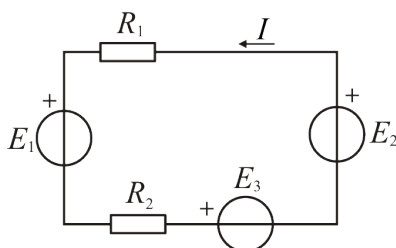


3.42 Primer: a) usklađenog i b) neusklađenog smera ems i struje.

Rešavanje kola podrazumava određivanje jačine struje u kolu. U kolu sa više generatora kada su neki od njih vezani u opoziciji ne može se u napred znati koji je pravi smer struje. To znači da je prvi korak u rešavanju kola pretpostavljanje smera struje u kolu. U prostom kolu struja može da teče u jednom od dva moguća smera. Drugi korak je pisanje jednačine oblika (3.24) iz koje se određuje jačina struje. Pri tome za jačinu struje može da se dobije: nula ($I = 0$), pozitivna vrednost ($I > 0$) ili negativna vrednost ($I < 0$). Ako se dobije nulta vrednost to znači da je zbir ems svih generatora jednak nuli. Ako se dobije pozitivna vrednost tada je pretpostavljeni smer struje ujedno i pravi smer struje u kolu. Ako se dobije negativna vrednost to znači da je pravi smer struje suprotan od pretpostavljenog. U daljim proračunima u analizi takvog kola treba voditi računa da prilikom uvrštavanja brojnih vrednosti ta struja ima negativnu vrednost.

Primer 3.32

Izračunati snage svih otpornika i generatora u kolu prikazanom na slici ako je $E_1 = 10\text{V}$, $E_2 = 20\text{V}$, $E_3 = 30\text{V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$ sa zadatim referentnim smerom struje kao na slici.



Rešenje. EMS generatora E_1 i E_3 nisu usklađene sa pretpostavljenim smerom struje, dok je ems generatora E_2 usklađena sa smerom struje, tako da je:

$$I = (-E_1 + E_2 - E_3) / (R_1 + R_2) = -20 / 40 = -0,5\text{A}.$$

Jačina struje je negativna što znači da je pravi smer struje suprotan od pretpostavljenog. Snage generatora su: $P_{E1} = -E_1 I = 5\text{W}$, $P_{E3} = -E_3 I = 15\text{W}$, i $P_{E2} = E_2 I = -10\text{W}$. Ukupna snaga svih generatora u kolu je $P_{E1} + P_{E3} + P_{E2} = 10\text{W}$. Snage pojedinih generatora u kolu mogu biti negativne ali ukupna snaga u kolu mora biti pozitivna ili eventualno jednaka nuli. Snage Džulovih gubitaka na otpornicima R_1 i R_2 su $P_{R1} = R_1 I^2 = 2,5\text{W}$ i $P_{R2} = 7,5\text{W}$. Ukupna snaga Džulovih gubitaka u kolu je $P_{R1} + P_{R2} = 10\text{W}$. Upoređivanjem ukupne snage generatora i ukupne snage Džulovih gubitaka može da se zaključi da je teorema o održanju snage zadovoljena. ■

Čitaocu se ostavlja da ponovi prethodni primer uz pretpostavku da struja teče u suprotnom smeru te na taj način dokaže da teorema o održanju snage mora biti zadovoljena bez obzira na pretpostavljeni smer struje.

3.18. Napon između dve tačke u prostom električnom kolu

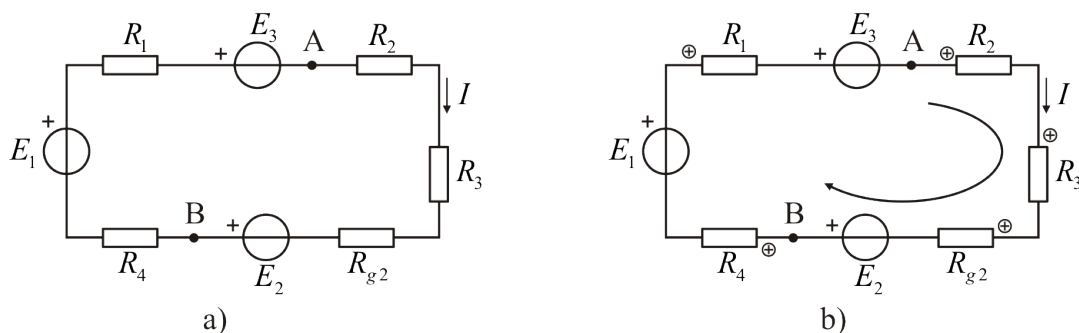
Do sada smo videli kako može da se odredi napon na krajevima otpornika i generatora. U ovom odeljku ćemo videti kako može da se odredi napon između bilo koje dve tačke u prostom električnom kolu. Ako se između dve tačke u kolu nalazi više redno vezanih elemenata tada je napon između te dve tačke jednak zbiru napona na elementima koji se nalaze duž putanje između te dve tačke, odnosno

$$U_{AB} = \sum_A^B U_i, \quad (3.25)$$

gde je U_i napon na pojedinim elementima duž putanje AB.

Samo da se podsetimo da se napon na otporniku određuje kao $U = RI$, pri čemu je „+“ kraj tamo gde struja ulazi u otpornik. Napon na naponskom generatoru je jednak njegovoj ems, odnosno $U = E$, pri čemu je „+“ kraj napona tamo gde je i „+“ kraj generatora. U izrazu (3.25) se prilikom sabiranja napona na pojedinim elementima nekada piše predznak „+“ a nekada predznak „-“. To zavisi od smeru struje i smeru kretanja kroz kolo od tačke A do tačke B i biće ilustrovano u primeru koji sledi.

Posmatrajmo električno kolo prikazano na slici 3.43.a. Prikom rešavanja kola se najpre pretpostavi smer struje u kolu, kao što je prikazano na slici 3.43.b. Zatim se na svakom otporniku označi kraj koji je na višem potencijalu. Po Omovom zakonu to je onaj kraj otpornika u koji struja ulazi. Na slici 3.43.b su ti krajevi obeleženi simbolom $\oplus$. Na kraju se izabere putanja kroz kolo od tačke A do tačke B. Prilikom sabiranja napona u izrazu (3.25) važi jednostavno pravilo: ako naiđemo na element ispred koga je simbol „+“ tada se napon tog elementa piše sa predznakom „+“. U suprotnom pišemo predznak „-“.



3.43 Napon između proizvoljne dve tačke u prostom kolu.

Napon U_{AB} u kolu na slici 3.43.a možemo da odredimo idući od tačke A do tačke B duž dve putanje. Prva putanja, prikazana na slici 3.43.b, je preko elemenata R_2 , R_3 , R_{g2} , i E_2 . Napon duž te putanje iznosi:

$$U_{AB} = +R_2 I + R_3 I + R_{g2} I - E_2.$$

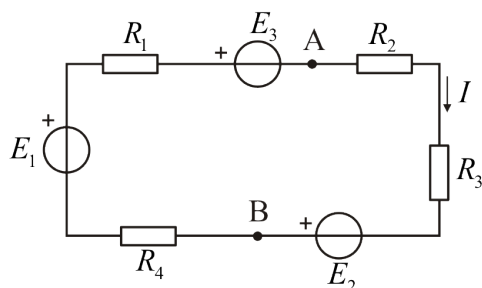
Druga putanja od A do B je preko elemenata E_3 , R_1 , E_1 , i R_4 . Napon duž te putanje iznosi:

$$U_{AB} = -E_3 - R_1 I + E_1 - R_4 I.$$

Treba napomenuti da oba izraza daju potpuno istu vrednost. Dakle napon u električnom kolu između tačaka A i B ne zavisi od izabrane putanje duž koje se taj napon računa. Bez obzira na izabranu putanju, napon ima istu brojnu vrednost. Osim toga napon ne zavisi ni od pretpostavljenog smeru struje, u šta ćemo se uveriti u sledećim primerima.

Primer 3.33

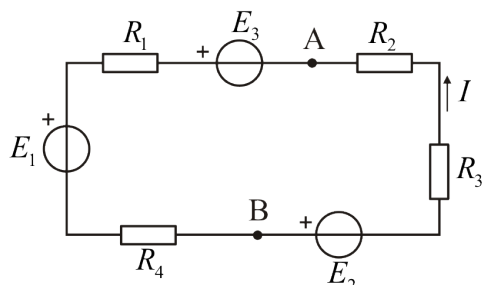
U kolu prikazanom na slici odrediti jačinu struje u odnosu na izabrani referentni smer pa zatim izračunati napon između tačaka A i B. $E_1 = 20\text{ V}$, $E_2 = 30\text{ V}$, $E_3 = 10\text{ V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$ i $R_4 = 40\Omega$.



Rešenje. Jačina struje iznosi $I = (E_1 - E_3 + E_2) / (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = 0,4 \text{ A}$. Napon od A do B duž desne strane kola iznosi $U_{AB} = R_2 I + R_3 I - E_2 = 8 + 12 - 30 = -10 \text{ V}$. Napon od A do B duž leve strane kola iznosi $U_{AB} = -E_3 - R_1 I + E_1 - R_4 I = -10 - 4 + 20 - 16 = -10 \text{ V}$. ■

Primer 3.34

Ponoviti prethodni primer koristeći novi referentni smer struje. $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 30 \text{ V}$, $E_3 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$ i $R_4 = 40 \Omega$.



Rešenje. Ovde je referentni smer struje suprotan u odnosu na kolo u prethodnom primeru. Jačina struje iznosi $I = (-E_1 + E_3 - E_2) / (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = -0,4 \text{ A}$. Vidimo da je struja iste vrednosti ali suprotnog predzaka. Napon od A do B duž desne strane kola iznosi $U_{AB} = -R_2 I - R_3 I - E_2$. Uvrštavanjem negativne vrednosti struje u ovaj izraz dobija se da je $U_{AB} = -10 \text{ V}$. Napon od A do B duž leve strane kola iznosi $U_{AB} = -E_3 + R_1 I + E_1 + R_4 I$. Uvrštavanjem negativne vrednosti struje u ovaj izraz opet se dobija da je $U_{AB} = -10 \text{ V}$. ■

Na osnovu dobijenih rezultata prethodna dva primera može da se zaključi da napon između dve tačke u kolu:

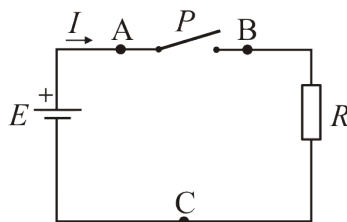
- ne zavisi od izbora putanje
- ne zavisi od pretpostavljenog (referentnog) smera struje.

Napon U_{AB} je razlika potencijala tačaka A i B, odnosno $U_{AB} = V_A - V_B$. Ako idemo od tačke B do tačke A tada računamo napon U_{BA} . Kako je $U_{BA} = V_B - V_A$ sledi da je $U_{BA} = -U_{AB}$.

Ako bi išli od tačke A preko tačke B ponovo do tačke A tada bi sabrali U_{AB} i U_{BA} . Ukupan napon duž zatvorene putanje je $U_{AB} + U_{BA} = U_{AB} - U_{AB} = 0$. To ima smisla zato što je napon od tačke A do tačke A jednak razlici potencijala dve iste tačke, odnosno $U_{AA} = V_A - V_A = 0$.

Primer 3.35

Odrediti napon U_{AB} i U_{BC} pre i posle zatvaranja prekidača P u kolu prikazanom na slici.



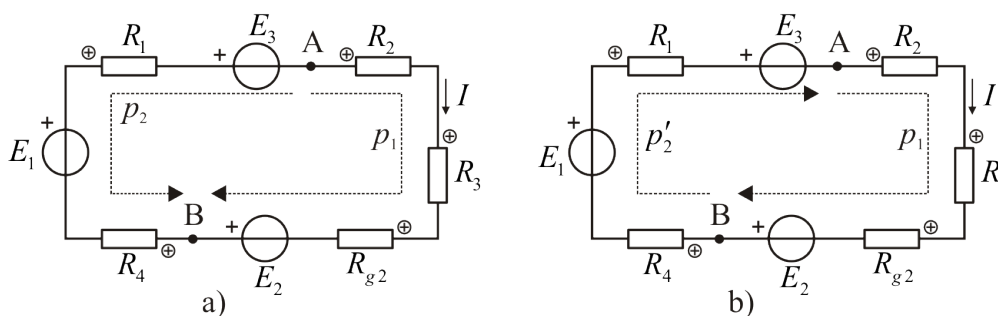
Rešenje. Pre zatvaranja prekidača jačina struje je jednaka nuli. Kako je struja jednaka nuli, to je i napon na prijemniku jednak nuli pa je $U_{BC} = 0$. Od A do B idemo kroz generator i prijemnik. Kako je $U_{BC} = 0$, sledi da je $U_{AB} = E$. Napomena: $U_{BA} = -E$. Nakon zatvaranja prekidača struja u kolu je jednaka $I = E / R$. Napon od B do C možemo da tražimo idući duže leve ili desne strane kola. Duž leve $U_{BC} = E$, duž desne je $U_{BC} = R \cdot I = E$. Što se tiče napona U_{AB} , nakon zatvaranja prekidača tačke A i B su na istom potencijalu pa je zato $U_{AB} = 0$. ■

3.19. Drugi Kirhofov zakon

Drugi Kirhofov zakon se odnosi na napone duž zatvorene konture. Kontura je kolekcija grana koja čini zatvorenu putanju. Ukoliko uočimo konturu u kolu tada je zbir napona na svim elementima duž te konture jednak nuli. Matematička formulacija drugog Kirhofovog zakona glasi

$$\sum U = 0. \quad (3.26)$$

Posmatrajmo električno kolo prikazano na slici 3.44.a. Svakoj tački u kolu možemo da pridružimo neki potencijal. Ako izaberemo dve proizvoljne tačku u kolu, na primer A i B, tada je napon između te dve tačke $U_{AB} = V_A - V_B$. Taj napon ne zavisi od izbora putanje već samo od pozicija tačaka A i B. To znači da bi se isti napon dobio kada bi išli po putanji p_1 i p_2 . Na slici 3.44.b je prikazan obrnuti smer putanje p_2 , označen kao p'_2 . To znači da bi, idući duž te putanje, odredili napon $U_{BA} = V_B - V_A$. Kada bi išli u krug od tačke A do tačke A, tada bi išli duž putanja p_1 i p'_2 . Sabiranjem napona duž putanja p_1 i p'_2 dobija se da je napon duž konture A-B-A jednak nuli, zato što je $U_{AB} + U_{BA} = 0$. Na ovaj način je dokazana jednačina data u izrazu (3.26).



3.44 Uz definiciju drugog Kirhofovog zakona.

Prilikom pisanja jednačine za konturu neophodno je da se utvrdi smer kretanja kroz konturu i da se na svakom otporniku označi „+“ kraj. To je kraj otpornika koji je na višem potencijalu. Ako se prilikom kretanja kroz konturu naiđe na „+“ kraj otpornika R , tada se u izrazu (3.26) piše predznak „+“, a umesto napona U može da se napiše $+RI$. U suprotnom se piše $-RI$. Slično važi i za ems naponskih generatora. Ako se naiđe na „+“ kraj generatora tada se u izrazu (3.26) piše predznak „+“, a umesto napona U može da se napiše $+E$. U suprotnom se piše $-E$. Prilikom kretanja kroz konturu dozvoljeno je krenuti od bilo koje tačke na toj konturi. Jedino

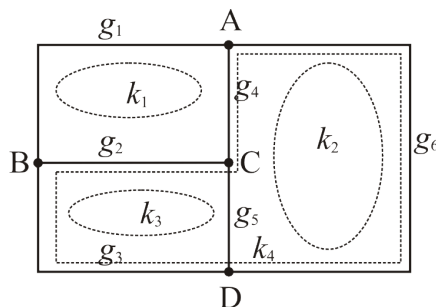
što je potrebno je da se opet završi u toj istoj tački. Smer kretanja duž konture je proizvoljan i nikako ne utiče na krajnji rezultat.

3.20. Složeno električno kolo

U prostim kolima je delovao jedan generator ili više redno vezanih generatora tako da je kroz sve elemente kola proticala struja iste jačine. Električna kola sa jednim generatorom i više otpornika mogu da se pomoću ekvivalentnog otpornika svedu na prosta kola. Međutim, postoje i složena električna kola. Takva kola ne mogu da se, pomoću ekvivalentne otpornosti, svedu na prosta kola. Na slici 3.45 je prikazan primer složenog električnog kola bez elemenata.

Radi lakše analize složenih kola uvedeni su sledeći pojmovi: čvor, grana i kontura.

Grana je deo kola u kome su svi elementi povezani redno, odnosno to je deo kola u kome kroz sve elemente teče struja u istom smeru i iste jačine. Grana se može sastojati od jednog ili više elemenata. Složeno kolo na slici 3.45 ima 6 grana, označenih sa g_1 do g_6 . Kroz svaku granu protiče samo jedna struja u jednom od dva moguća smera.



3.45 Složeno električno kolo.

Čvor je mesto spajanja tri ili više grana. Kolo prikazano na slici 3.45 ima četiri čvora obeležena slovima A, B, C i D. Smer struje u granama može biti takav da neke struje ulaze u čvor dok neke izlaze iz čvora.

Kontura je zatvorena putanja sačinjena od grana. U kolu prikazanom na slici 3.45 možemo da uočimo nekoliko kontura. Kontura k_1 je sastavljena od grana g_1 , g_2 i g_4 . Kontura k_2 je sastavljena od grana g_4 , g_5 i g_6 . Konturu k_3 čine grane g_2 , g_5 i g_3 . Osim tih trivijalnih kontura, u složenom kolu se mogu koristiti i konture kao što je to kontura k_4 . Ona sadrži grane g_2 , g_4 , g_6 i g_3 . Za rešavanje kola nije potrebno koristiti sve moguće konture, već samo onoliko kontura koliko je potrebno da se obuhvate sve grane u kolu. U prethodnom slučaju to mogu biti konture k_1 , k_2 i k_3 , ili k_1 , k_2 i k_4 , ili k_1 , k_3 i k_4 .

Rešavanje složenih kola najčešće podrazumeva određivanje jačine struja u svim granama kola ako su nam poznate ems generatora otpornosti generatora i otpornosti svih prijemnika. Složeno električno kolo može da se reši na više načina, i to primenom:

- I i II Kirhofovog zakona,
- metode potencijala čvorova,
- metode konturnih struja,
- metode superpozicije, itd.

Bez obzira na primenjenu metodu, potrebno je napisati potreban broj jednačina kojima bi se odredile nepoznate veličine. Najjednostavniji način je primena I i II Kirhofovog zakona, ali se po toj metodi piše najviše jednačina. Metoda potencijala čvorova i metoda konturnih struja su pogodnije u nekim slučajevima kada je, zbog konfiguracije električnog kola, moguće rešiti kolo pisanjem manjeg broja jednačina u odnosu na Kirhofove zakone. Međutim te metode su malo komplikovanije. Metoda superpozicije je metoda koja daje mogućnost da se složeno kolo prikaže kao linearna kombinacija više prostih kola.

Osim metoda, postoje i nekoliko teorema koje se mogu primeniti u složenim kolima kao što su:

- Tevenenova teorema i
- Nortonova teorema.

Primenom ovih teorema je moguće proizvoljan deo električnog kola između neke dve tačke u kolu zameniti ekvivalentnim generatorom i njegovom ekvivalentnom unutrašnjom otpornošću.

3.21. Rešavanje kola primenom prvog i drugog Kirhofovog zakona

Po ovoj metodi je potrebno napisati onoliko jednačina koliko ima nepoznatih struja u kolu. U svakom kolu ima određeni broj čvorova N_c i grana N_g . U svakoj grani postoji po jedna nepoznata struja. To znači da je potrebno napisati ukupno N_g jednačina. Od toga određeni broj jednačina se piše po prvom Kirhofovom zakonu a ostatak po drugom.

Ako u kolu ima N_c čvorova tada je potrebno i dovoljno napisati $N_c - 1$ jednačinu po prvom Kirhofovom zakonu. Na primer, ako u kolu ima 4 čvora tada je dovoljno izabrati bilo koja 3 čvora i za njih napisati jednačine oblika $\sum I = 0$.

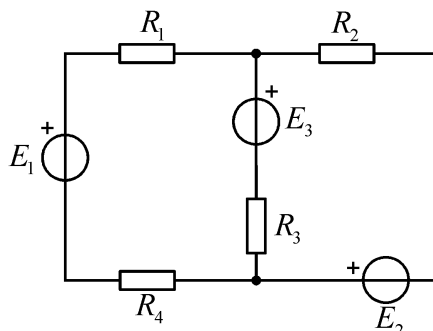
Ako u kolu ima N_g grana tada je potrebno i dovoljno napisati $N_g - (N_c - 1)$ jednačinu po drugom Kirhofovom zakonu. Na primer, ako u kolu ima 8 grana i 4 čvora tada je potrebno napisati ukupno 8 jednačina. Od toga 3 jednačine po prvom a ostatak ($8 - 3 = 5$) jednačina po drugom Kirhofovom zakonu.

Procedura za rešavanje složenih električnih kola primenom Kirhofovih zakona ima sledeće korake:

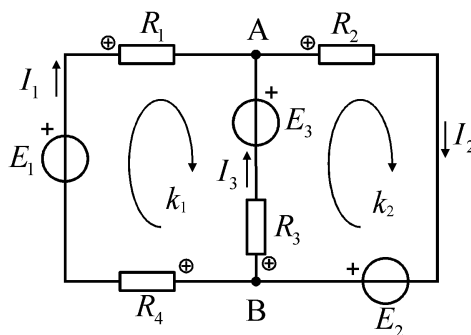
1. Obeležiti sve čvorove velikim slovima,
2. Pretpostaviti smerove struja u svim granama,
3. Na svakom otporniku simbolom „+“ označiti kraj koji je na višem potencijalu u skladu sa Omovim zakonom,
4. Odabrati $N_c - 1$ čvorova i za svaki čvor napisati jednačinu po I Kirhofovom zakonu,
5. Odabrati $N_g - (N_c - 1)$ kontura, nacrtati smer obilaska i napisati za svaku konturu po jednu jednačinu po II Kirhofovom zakonu. Konture moraju biti odabrane tako da sve grane budu obuhvaćene.
6. Rešiti tako napisan sistem jednačina.

Primer 3.36

Rešiti složeno kolo prikazano na slici ako su poznate brojne vrednosti. $E_1 = 20\text{ V}$, $E_2 = 30\text{ V}$, $E_3 = 10\text{ V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 20\Omega$ i $R_4 = 40\Omega$.



Rešenje. U kolu imamo $N_\epsilon = 2$ čvora i $N_g = 3$ grane. U skladu sa procedurom, potrebno je: obeležiti čvorove slovima A i B, pretpostaviti smerove struja (3 grane, 3 struje), obeležiti „+“ krajeve na otpornicima i odeležiti smerove kontura. Sve ovo je prikazano na sledećoj slici.



U kolu postoje 3 grane i 2 čvora. Po prvom Kirhofovom zakonu je potrebno napisati $N_\epsilon - 1$ jednačinu. Dakle, tu jednu jednačinu možemo da napišemo ili za čvor A ili za čvor B. Ovde je jednačina napisana za čvor A:

$$\text{A)} \quad -I_1 - I_3 + I_2 = 0.$$

Po drugom Kirhofovom zakonu potrebno je napisati $N_g - (N_\epsilon - 1)$ jednačinu, tako da je potrebno obeležiti samo dve konture (obično se biraju okna, levo i desno okno). Za dve jednačine potrebne su dve konture koje su ovde obeležene sa k_1 i k_2 . Jednačine glase:

$$k_1) \quad +E_3 - R_3 I_3 + R_4 I_1 - E_1 + R_1 I_1 = 0,$$

$$k_2) \quad +R_2 I_2 - E_2 + R_3 I_3 - E_3 = 0.$$

Sistem od 3 jednačine sa 3 nepoznate možemo rešiti na više načina. Ovde se predlaže da se najpre primeni metoda zamene. Da se iz prve jednačine izrazi jedna struja u zavisnosti od ostalih. Na primer: $I_2 = +I_1 + I_3$, i da se u druge dve jednačine I_2 zameni sa $(I_1 + I_3)$. Tako dobijamo:

$$k_1) \quad +E_3 - R_3 I_3 + R_4 I_1 - E_1 + R_1 I_1 = 0,$$

$$k_2) \quad +R_2 (I_1 + I_3) - E_2 + R_3 I_3 - E_3 = 0.$$

Posle sređivanja i grupisanja otpornika uz struje dobijamo:

$$k_1) \quad +E_3 - R_3 I_3 + (R_4 + R_1) I_1 - E_1 = 0,$$

$$k_2) \quad +R_2 I_1 - E_2 + (R_3 + R_2) I_3 - E_3 = 0.$$

Zamenom brojnih vrednosti i prebacivanjem poznatih vrednosti na desnu stranu jednakosti dobijamo:

$$k_1) \quad -20I_3 + 50I_1 = 10,$$

$$k_2) \quad 20I_1 + 40I_3 = 40.$$

Jednačine k_1 i k_2 ćemo rešiti metodom suprotnih koeficijenata. Potrebno je proširiti jednačine tako da se uz I_1 ili I_3 pojave suprotni koeficijenti. Na primer možemo da jednačinu k_1 pomnožimo sa 2 tako da uz struju I_3 dobijemo suprotne koeficijente:

$$k_1) \quad -40I_3 + 100I_1 = 20,$$

$$k_2) \quad 20I_1 + 40I_3 = 40.$$

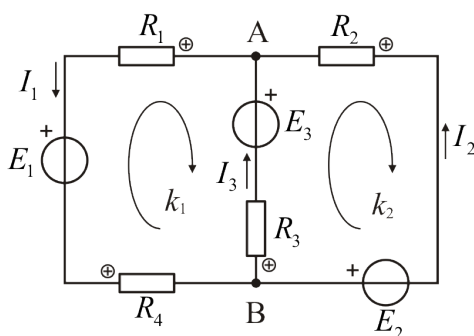
Sabirajući jednačine k_1 i k_2 dobija se jedna jednačina u kojoj su se poništili koeficijenti uz I_3 :

$$(k_1) + (k_2) \quad 120I_1 = 60,$$

odakle je $I_1 = 0,5\text{A}$. Uvodeći ovo rešenje u k_2 dobijamo da je $I_3 = (40 - 20 \cdot 0,5) / 40 = 0,75\text{A}$. Na kraju uvrštavajući ove dve poznate struje u prvu jednačinu dobijamo da je $I_2 = 1,25\text{A}$. ■

Primer 3.37

Ponoviti prethodni primer uz drugačije referentne smerove struja kao što je predloženo na slici.

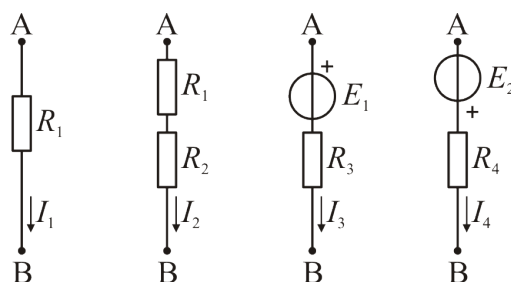


Rešenje. Promenom smera struja I_1 i I_2 menja se samo predznak brojne vrednosti (rešenja). Ponovnim pisanjem i rešavanjem jednačina na način predložen u prethodnom primeru dobiće se sledeće brojne vrednosti za struje: $I_1 = -0,5\text{A}$, $I_2 = -1,25\text{A}$. Struja I_3 ima potpuno istu vrednost $0,75\text{A}$ zato što joj je referentni smer ostao isti kao i u prethodnom primeru. ■

Čitaocima se ostavlja da sami provere zakon o održanju snage u prethodna dva primera i uvere se da je ukupna snaga svih generatora jednaka ukupnoj snazi Džulovih gubitaka na svim otpornicima bez obzira na referentni smer struje.

3.22. Metod potencijala čvorova

Metoda potencijala čvorova (MPČ), je metod za rešavanje složenih električnih kola. Omogućava rešavanje kola pisanjem manjeg sistema jednačina u odnosu na Kirhofove zakone. Sistem jednačina po MPČ se dobija tako što se u jednačinama po I Kirhofovom zakonu struje u granama izraze preko razlike potencijala čvorova tih grana. Na slici 3.46 su prikazane grane sa različitim elementima i referentnim smerovima struja.



3.46 Uz objašnjenje metode potencijala čvorova.

Primenjujući Omov zakon i pravilo za određivanje napona između dve tačke, odeljak 3.18, za primere prikazane na prethodnoj slici mogu da se napišu sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} p_1 : U_{AB} &= R_1 I_1 \\ p_2 : U_{AB} &= (R_1 + R_2) I_2 \\ p_3 : U_{AB} &= E_1 + R_3 I_3 \\ p_4 : U_{AB} &= -E_2 + R_4 I_4 \end{aligned}$$

Odakle slede izrazi za jačine struja u svakoj od grana izraženi preko razlike potencijala:

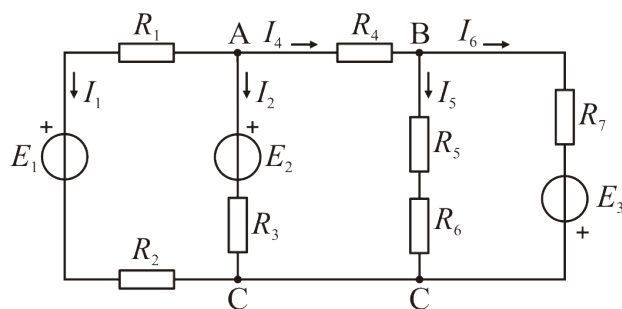
$$\begin{aligned} p_1 : I_1 &= \frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{V_A - V_B}{R_1} \\ p_2 : I_2 &= \frac{U_{AB}}{(R_1 + R_2)} = \frac{V_A - V_B}{(R_1 + R_2)} \\ p_3 : I_3 &= \frac{U_{AB} - E_1}{R_3} = \frac{V_A - V_B - E_1}{R_3} \\ p_4 : I_4 &= \frac{U_{AB} + E_2}{R_4} = \frac{V_A - V_B + E_2}{R_4} \end{aligned}$$

Kolo sa n_ϵ čvorova ima n_ϵ potencijala. Sa druge strane, za kolo sa n_ϵ čvorova potrebno je napisati samo $(n_\epsilon - 1)$ jednačinu po Prvom Kirhofovom zakonu. Problem viška jednog nepoznatog potencijala rešava se tako što se jedan čvor proglašuje referentnim. Napon između bilo koja dva čvora u kolu je jednak razlici potencijala tih čvorova, $U_{AB} = V_A - V_B$. Ako potencijalu svakog čvora dodamo neku vrednost V_0 , napon se neće promeniti.

$$U_{AB} = V'_A - V'_B = (V_A + V_0) - (V_B + V_0) = V_A - V_B.$$

Potencijal V_0 može da ima bilo koju vrednost. Ako usvojimo vrednost $V_0 = -V_B$ potencijal čvora B postaje $V'_B = 0$. Samim tim vrednost potencijala čvora B postaje poznata. Dakle, u kolu uvek možemo odabrati neki čvor čiji je potencijal jednak nuli. Taj čvor se naziva referentni čvor. Za taj čvor se ne piše jednačina po I Kirhofovom zakonu.

Pokažimo proces nastajanja jednačina na primeru elektrilnog kola prikazanog na slici 3.47. Kolo se sastoji od 3 čvora i 6 grana. U ovom primeru je čvor C usvojen da bude referentni čvor. Njegova vrednost je jednaka nuli, $V_C = 0$. Pretpostavimo da su u kolu poznate vrednosti svih ems i svih otpornika. Za kolo sa n_ϵ čvorova potrebno je i dovoljno napisati $(n_\epsilon - 1)$ jednačinu. U ovom primeru su dovoljne samo dve jednačine kojima ćemo odrediti V_A i V_B . Određivanjem vrednosti potencijala V_A i V_B kolo je praktično rešeno. Jačina struje u bilo kojoj grani bi mogla da se odredi na prethodno opisan način, pri čemu je $U_{AC} = V_A$ i $U_{BC} = V_B$.



3.47 Rešavanje električnog kola primenom metode potencijala čvorova.

Jednačine po prvom Kirhofovom zakonu za čvorove A i B glase:

$$\text{A) } I_1 + I_2 + I_4 = 0 \quad \text{i}$$

$$\text{B) } -I_4 + I_5 + I_6 = 0.$$

Jačine struja možemo da izrazimo preko napona na prethodno opisan način, tako da je:

$$I_1 = \frac{V_A - V_C - E_1}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = \frac{V_A - V_C - E_2}{R_3}, \quad I_4 = \frac{V_A - V_B}{R_4}, \quad I_5 = \frac{V_B - V_C}{R_5 + R_6}, \quad I_6 = \frac{V_B - V_C + E_3}{R_7}.$$

Uvrštavanjem ovih jednakosti u prethodno napisan sistem jednačina, dobijamo sistem:

$$\text{A) } \frac{V_A - V_C - E_1}{R_1 + R_2} + \frac{V_A - V_C - E_2}{R_3} + \frac{V_A - V_B}{R_4} = 0 \quad \text{i}$$

$$\text{B) } -\frac{V_A - V_B}{R_4} + \frac{V_B - V_C}{R_5 + R_6} + \frac{V_B - V_C + E_3}{R_7} = 0.$$

Kako je $V_C = 0$, dobijamo sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$\text{A) } \frac{V_A - E_1}{R_1 + R_2} + \frac{V_A - E_2}{R_3} + \frac{V_A - V_B}{R_4} = 0 \quad \text{i}$$

$$\text{B) } -\frac{V_A - V_B}{R_4} + \frac{V_B}{R_5 + R_6} + \frac{V_B + E_3}{R_7} = 0.$$

Grupisanjem članova uz nepoznate V_A i V_B , i prebacivanjem poznatih vrednosti sa druge strane jednakosti dobijamo izraze:

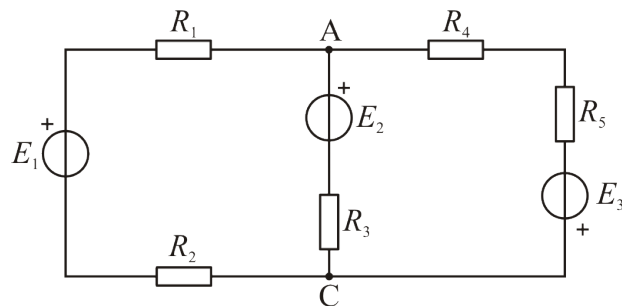
$$\text{A) } V_A \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_B}{R_4} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2}{R_3} \quad \text{i}$$

$$\text{B) } V_B \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6} + \frac{1}{R_7} \right) - \frac{V_A}{R_4} = -\frac{E_3}{R_7}.$$

Zamenom brojnih vrednosti i rešavanjem sistema jednačina nekom od metoda (metod zamene, metod suprotnih koeficijenata, ...) konačno se dobijaju brojne vrednosti potencijala V_A i V_B .

Primer 3.38

Odrediti snagu otpornika R_3 rešavajući kolo metodom potencijala čvorova. $E_1 = 30 \text{ V}$, $E_2 = 60 \text{ V}$, $E_3 = 15 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$ i $R_5 = 10 \Omega$. Pretpostaviti smerove struja tako da izlaze iz čvora A.



Rešenje. Uzmimo čvor C da bude referentni. Potencijal čvora C je jednak nuli. Potrebna se smo jedna jednačina kako bi odredili potencijal čvora A. Primenjujući prethodno opisan metod, jednačina za čvor A glasi:

$$A) V_A \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5} \right) = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2}{R_3} - \frac{E_3}{R_4 + R_5}.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobijamo jednačinu

$$A) V_A \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15} \right) = \frac{30}{30} + \frac{60}{30} - \frac{15}{15}.$$

Desna strana jednačine ima dimenziju jačine struje i iznosi 2A. Kako bi se oslobodili razlomaka ceo izraz možemo da pomnožimo sa 30. Na taj način dobijamo da je $V_A(1+1+2)=60$, odnosno $V_A=15V$. Jačina struje u srednjoj grani, usmerena od tačke A ka tački C, iznosi

$$I_3 = \frac{V_A - V_C - E_2}{R_3} = \frac{15 - 60}{30} = -1,5A.$$

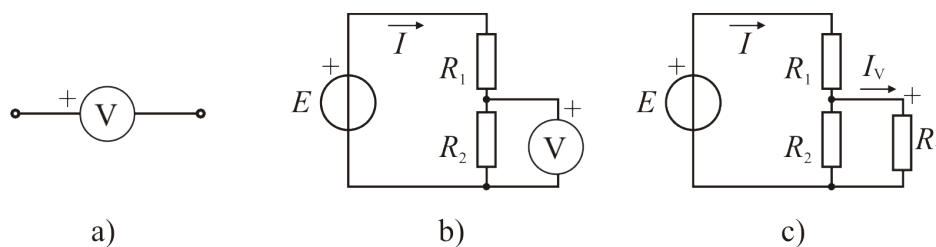
Snaga Džulovih gubitaka otpornika R_3 iznosi $P_3 = R_3 I_3^2 = 67,5W$. ■

3.23. Merenje električnih veličina u kolima sa vremenski konstantnim strujama

Za merenje električnih veličina: napona, jačine struje i otpornosti koriste se analogni ili digitalni merni uređaji. Ti merni uređaji mogu biti zasebni, pri čemu mere samo jednu veličinu, ili mogu biti multifunkcionalni kada mogu da mere sve tri veličine. Instrumenti za merenje napona nazivaju se voltmetri, za merenje struje ampermetri, dok se instrumenti za merenje otpornosti nazivaju ommetri. Ukoliko mere više veličina zovu se multimetri. Ukoliko se koristi multimetar, pre merenja je potrebno izabrati željenu funkciju (voltmetar, ampermetar ili ommetar). Prilikom merenja napona i jačine struje potrebno je voditi računa o tome da li se mere vremenski promenljive ili vremenski konstantne veličine. Na ovom mestu će biti objašnjeno merenje električnih veličina u kolima sa vremenski konstantnim strujama.

3.23.1. Voltmetar

Voltmetar je merni instrument koji meri napon između dve tačke u električnom kolu. Voltmetar ima dva priključka (+) i (−), koje treba vezati za tačke između kojih se meri napon. Grafički simbol za voltmetar prikazan je na slici 3.48.a, pri čemu je uobičajeno da se u električnim šemama obeležava samo pozitivan priključak. Primer vezivanja voltmetra prikazan je na slici 3.48.b. U ovom primeru, voltmetar meri napon na otporniku R_2 .

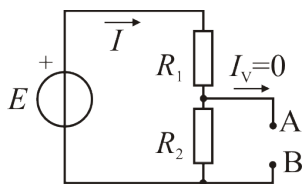


3.48 a) Grafički simbol, b) primer vezivanja, i c) model realnog voltmetra.

Voltmetri imaju veoma veliku unutrašnju otpornost i prilikom analize električnih kola mogu da se modeluju otpornikom otpornosti R_v , kao što je prikazano na slici 3.48.c. Prilikom merenja napona na otporniku R_2 , kroz voltmetar protiče struja I_v . Napon koji pokazuje voltmetar je prema Omovom zakonu $U_v = R_v I_v$. Primenjujući strujni razdelnik, možemo da izračunamo jačinu struje koja prolazi kroz voltmetar. Tako dobijamo da je

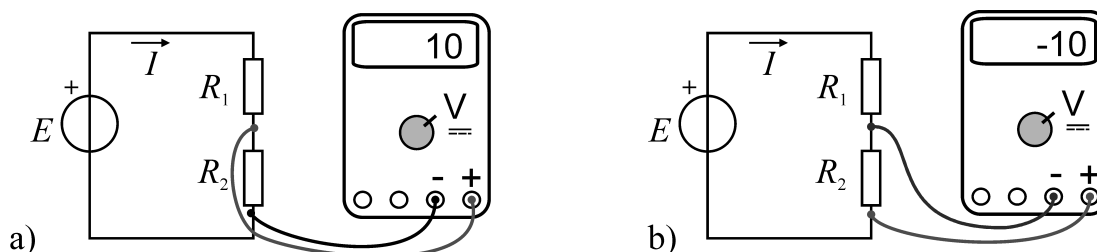
$$I_v = I \frac{R_2}{R_2 + R_v} \text{ i } U_v = I \frac{R_v R_2}{R_2 + R_v}$$

Kako je $R_v \gg R_2$ sledi da je $I_v \approx I R_2 / R_v$. Oдавde se vidi i da je struja koja prolazi kroz voltmetar zanemarljivo mala. Napon voltmetra je približno $U_v \approx I R_2$. Što je otpornost voltmetra veća to je i prethodni izraz bliži teorijski očekivanoj vrednosti. U idealnom slučaju možemo da smatramo da je otpornost voltmetra beskonačno velika i da je $I_v = 0$. To znači da se on može zameniti prekidom u kolu, kao što je ilustrovano na slici 3.49. U tom slučaju pokazivanje voltmetra odgovara naponu U_{AB} .



3.49 Model idealnog volmetra.

Kod voltmetra koji služi za merenje vremeski konstantnog napona potrebno je voditi računa o polaritetu priključaka. Pozitivan kraj voltmetra potrebno je priključiti na kraj otpornika koji se nalazi na višem potencijalu kao što je prikazano na slici 3.50.a. Na taj način pokazivanje instrumenta će biti pozitivno. Ukoliko se okrenu priključci, voltmetar će pokazati negativnu vrednost (slika 3.50.b).

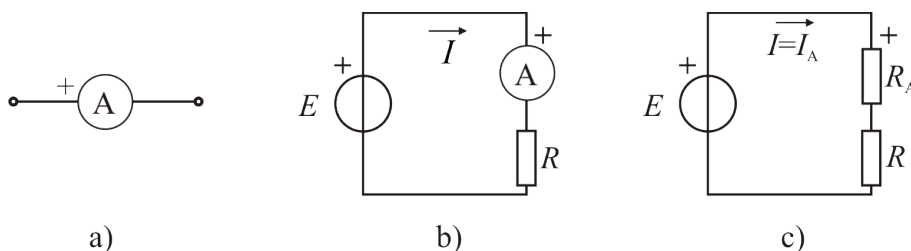


3.50 Pokazivanja voltmetra u zavisnosti od načina priključenja.

3.23.2. Ampermetar

Ampermetar je merni instrument koji meri jačinu struje u grani električnog kola. Grafički simbol za ampermetar prikazan je na slici 3.51.a. Ampermetar ima dva priključka (+) i (-), pri čemu je uobičajeno da se u električnim šemam obeležava samo pozitivan priključak.

Merenje jačine struje vrši se tako što se ampermetar priključi u granu u kojoj se meri struja, kao što je ilustrovano na slici 3.51.b. Ampermetri imaju veoma malu unutrašnju otpornost i prilikom analize električnih kola mogu da se modeluju otpornikom otpornosti R_A , kao što je prikazano na slici 3.51.c.

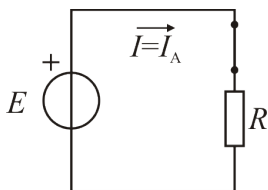


3.51 a) Grafički simbol, b) primer vezivanja i c) model realnog ampermetra.

Kroz ampermetar prolazi ista jačina struje kao i kroz otpornik, $I_A = I$. Rešavajući prosto kolo vidimo da je

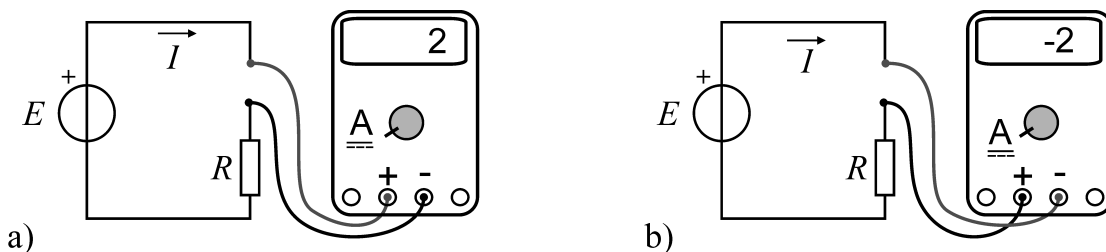
$$I_A = \frac{E}{R_A + R}.$$

Unutrašnja otpornost ampermetra je zanemarljivo mala, odnosno $R_A \ll R$. To znači da je $I_A \approx E/R$. U idealnom slučaju otpornost ampermetra je jednaka nuli, $R_A = 0$. To znači da se on može zameniti kratkom vezom u kolu, kao što je ilustrovano na slici 3.52. U tom slučaju pokazivanje ampermetra iznosi $I_A = E/R$.



3.52 Model idealnog ampermetra.

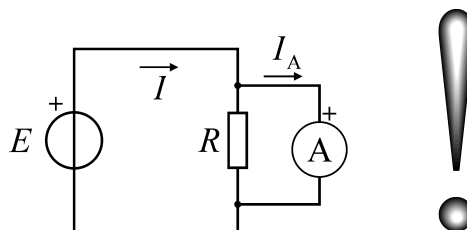
Kod ampermetra koji služi za merenje vremeniski konstantne struje potrebno je voditi računa o polaritetu priključaka. Primer pravilnog vezivanja ampermetra prikazan je na slici 3.53.a. Ampermetar je potrebno vezati tako da struja ulazi u (+) kraj instrumenta. Na taj način se obezbeđuje da instrument pokazuje pozitivnu vrednost. Ukoliko se ampermetar priključi na način prikazan na slici 3.53.b, ampermetar će pokazati negativnu vrednost.



3.53 Pokazivanja ampermetra u zavisnosti od načina priključenja.

Veoma je važno voditi računa u povezivanju ampermetra kako ne bi došlo do njegovog oštećenja usled prevelike jačine struje kroz instrument. Na slici je prikazan pogrešan način priključenja ampermetra. Ako se ampermetar priključi paralelno generatoru tada će sva struja, umesto kroz otpornik, ići kroz instrument. Ako sa R_A , označimo unutrašnju otpornost ampermetra tada je jačina struje kroz instrument $I_A = I = E/R_A$. Kako je unutrašnja otpornost ampermetra veoma mala (praktično zanemarljiva) struj I_A može da dostigne veoma veliku

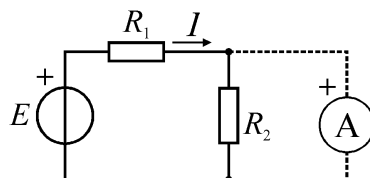
vrednost koja može da ošteti instrument. Kako bi se sačuvao instrument, u instrumente se ugrađuje strujna zaštita koja može da bude pasivna (osigurači) ili aktivna upotrebom specijalnih elektronskih komponenti.



3.54 Pogrešno priključivanje ampermetra.

Primer 3.39

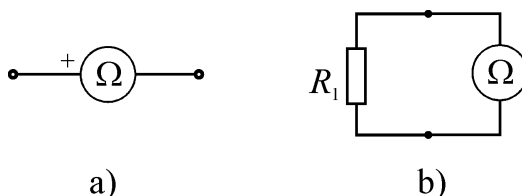
Odrediti jačinu struje u kolu prikazanom na slici ako je $E = 12\text{V}$, $R_1 = 1000\Omega$, $R_2 = 2000\Omega$. Odrediti pokazivanje ampermetra zanemarljive unutrašnje otpornosti, ako se greškom priključi paralelno otporniku R_2 .



Rešenje. Pre priključenja ampermetra struja I prolazi kroz oba otpornika tako da je $I = E/(R_1 + R_2) = 4\text{mA}$. Nakon priključenja ampermetra struja prolazi kroz otpornik R_1 i ampermetar zanemarljive unutrašnje otpornosti, tako da je $I_A = I = E/R_1 = 12\text{mA}$. U ovom slučaju struja kroz ampermetar neće oštetiti instrument iako je pogrešno priključen. Razlog za to je prilično velika otpornost otpornika R_1 . Da je otpornik R_1 predstavljao unutrašnju otpornost generatora, npr. $R_1 = 0,5\Omega$, tada bi kroz ampermetar postojala struja $I_A = 24\text{A}$. Ta struja je izuzetno velika i destruktivna za instrument ali i za sam generator. Snaga generatora bi u tom slučaju bila $P_E = E \cdot I_A = 288\text{W}$. ■

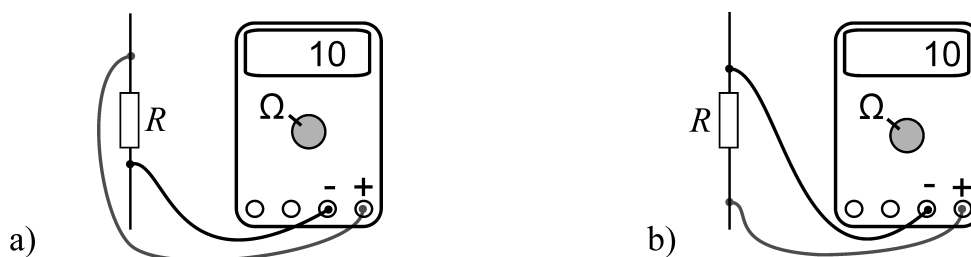
3.23.3. Ommetar

Ommetar je merni instrument za merenje otpornosti. Grafički simbol za ommetar prikazan je na slici 3.55.a. Ommetar ima dva priključka kojima se priključuje paralelno sa otpornikom ili nekim drugim elementom. Ommetar ima dva priključka (+) i (−), pri čemu je uobičajeno da se u električnim šemama obeležava samo pozitivan priključak. Pri merenju otpornosti otpornika nije potrebna baterija ili neki drugi naponski generator. Dovoljno je samo priključiti instrument direktno na otpornik čija se otpornost meri. Ommetrom je moguće meriti otpornost između bilo koje dve tačke u električnom kolu ali je pri tome neophodno isključiti sve generatore u tom električnom kolu (u praksi je uobičajeno da se pri takvim merenjima baterije izvade iz električnog kola).



3.55 a) Grafički simbol za ommetar, b) primer vezivanja ommetra.

Primer u kojem se meri otpornost otpornika R prikazan je na slici 3.56.a. Prilikom merenja otpornosti otpornika, nije važno kako se priključuju priključci ommetra, tako da instrument pokazuje istu (uvek pozitivnu) vrednost bez obzira na način priključenja (slike 3.56.a. i b).

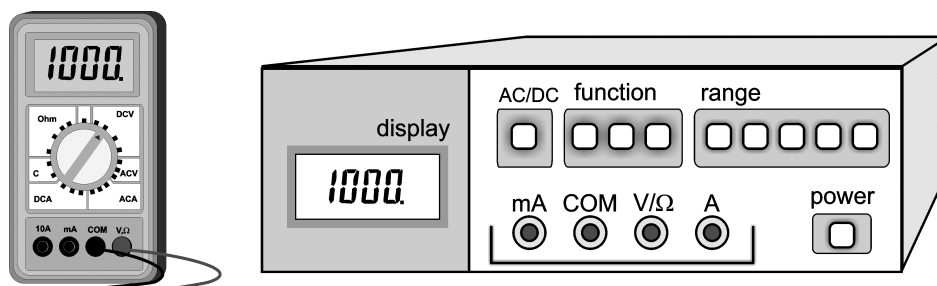


3.56 Pokazivanja ommetra u zavisnosti od načina priključenja na otpornik.

Ovde je potrebno napomenuti da postoje i elementi kod kojih je važno kako se ommetar priključuje. Najjednostavniji primer je merenje otpornosti poluprovodničkih komponenata kao što su diode, tranzistori, tiristori, itd. Međutim o tome će biti više reči na kraju udžbenika.

3.23.4. Multimetar

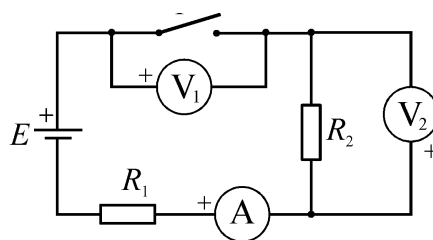
Na slici 3.57.a prikazan je prenosivi univerzalni merni instrument. Na njemu se nalaze priključci i preklopnik. Preklopnikom se može odabrati merenje napona (jednosmernog ili naizmeničnog), merenje struje (jednosmerne ili naizmenične) ili otpornosti. Kod ovih instrumenata obično je jedan priključak zajednički za sve vrste merenja i on je (-) kraj instrumenta, to je priključak označen sa „COM“. Ukoliko se meri napon ili otpornost tada je (+) kraj instrumenta priključak označen sa "V/ Ω ". Ukoliko se meri jačina struje do 1A tada je (+) kraj instrumenta priključak označen sa "mA". Za veće struje se koristi poseban priključak označen sa "A". Preklopnikom se osim izbora funkcije bira i merni opseg merene veličine (npr. 2mA, 20mA, 200mA). Osim ove tri fizičke veličine, digitalni mutimetri veoma često imaju i mogućnos merenja kapacitivnosti kondenzatora, temperature ambijenta, ili pojedinih parametara poluprovodničkih elemenata (tranzistora). Na slici 3.57.b prikazan je laboratorijski multimetar, koji se koristi za preciznija merenja. Ima veoma slične priključke i funkcije kao i prenosivi. Laboratorijski instrumenti su većih dimenzija, teži su i često koriste napajanje iz gradske mreže tako da ne mogu da služe kao prenosivi.



3.57 a) Prenosivi univerzalni merni instrument i b) laboratorijski univerzalni merni instrument.

Primer 3.40

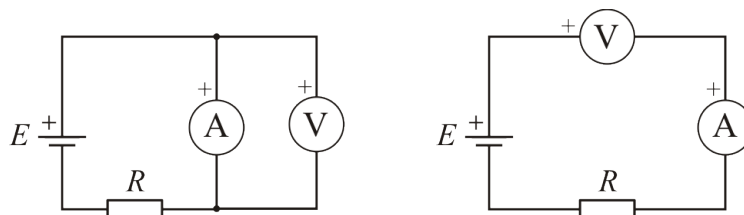
U električnom kolu prikazanom na slici odrediti pokazivanje mernih instrumenata pre i posle zatvaranja prekidača. $E = 15\text{ V}$, $R_1 = 900\Omega$ i $R_2 = 300\Omega$.



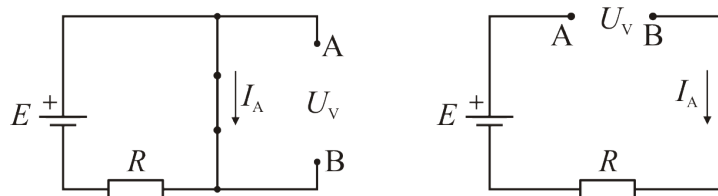
Rešenje. Kada je prekidač otvoren jačina struje u kolu je jednaka nuli pa je i napon na otporniku jednak nuli. Pokazivanje ampermetra A je nula ($I_A = 0$), pokazivanje voltmetra V_2 je nula ($U_{V2} = 0$). Voltmetar V_1 meri napon između tačaka prekidača. Kako je napon na otporniku nula, pokazivanje V_1 je 15 V, ($U_{V1} = 15\text{V}$). Kada je prekidač zatvoren struja prolazi samo kroz generator, prekidač, otpornik i ampermetar. Jačina struje je $I = E/(R_1 + R_2) = 12,5\text{ mA}$, u smeru skazaljke na satu. Kako je ampermetar okrenut tako da struja ulazi u minus kraj instrumenta pokazivanje ampermetra A je $I_A = -12,5\text{ mA}$. I voltmetar V_2 je priključen tako da je njegov plus kraj povezan na onaj kraj otpornika R_2 koji je na nižem potencijalu. Pokazivanje voltmetra V_2 je $U_{V2} = -3,75\text{ V}$. V_1 priključen između tačaka zatvorenog prekidača pa je $U_{V1} = 0$. ■

Primer 3.41

U električnom kolu prikazanom na slici odrediti pokazivanje idealnih mernih instrumenata. $E = 10\text{ V}$, $R = 10\Omega$.

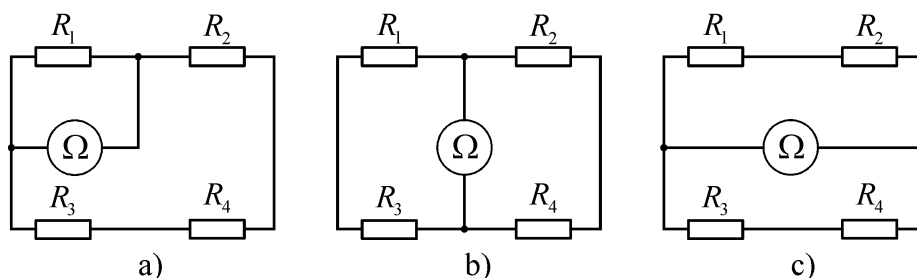


Rešenje. Ampermetar i voltmetar zamenimo ekvivalentnim modelom. U idealnom slučaju voltmetar je prekid u kolu, dok je ampermetar kratka veza, kao što je prikazano na sledećoj slici. Dakle u prvom slučaju je $I_A = 1\text{ A}$ a $U_V = 0$. U drugom slučaju je $I_A = 0$ a $U_V = 15\text{ V}$.



Primer 3.42

U električnim kolima prikazanim na slikama odrediti pokazivanje ometra. $R_1 = 900\Omega$, $R_2 = 1200\Omega$, $R_3 = 450\Omega$ i $R_4 = 300\Omega$.



Rešenje.

Na slici a) ommetar je priključen na otpornik R_1 ali njegovo pokazivanje neće biti 900Ω . Razlog je taj što je ommetar istovremeno priključen i na grupu otpornika R_2 , R_3 i R_4 koji su međusobno vezani redno. Kada se ommetar veže na ovakav način u kolo tada on meri ekvivalentnu otpornost između priključnih tačaka. Ukupna otpornost je jednaka paralelnoj vezi otpornika R_1 i otpornika $R_{234} = 1950 \Omega$. Pokazivanje ommetra je $615,79 \Omega$. U kolu prikazanom na slici b) je, iz istih razloga kao u prethodnom kolu, pokazivanje ommetra $710,52 \Omega$. U kolu na slici c) pokazivanje ommetra je $552,63 \Omega$. ■

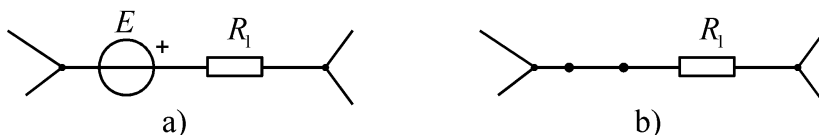
Napomena. Ukoliko postoji potreba da se izmeri otpornost samo jednog od otpornika tada je potrebno barem jedan kraj otpornika isključiti iz kola, kao što je prikazano na slici. U tom slučaju ommetar meri samo otpornost otpornika R_1 .

3.24. Teorema superpozicije

Električno kolo je linearno ako su karakteristike elemenata (otpornika i generatora) nezavisne od jačine i smera struje kroz njih. Kolo u kojem postoji bar jedan nelinearni element je nelinearno. U linearnim kolima važi princip superpozicije (sabiranja). Predpostavimo da u nekom električnom kolu deluje više generatora. U tom slučaju može se zamisliti da neka struja I_k u grani k potiče od zbira struja koje prouzrokuje svaki od generatora ponaosob,

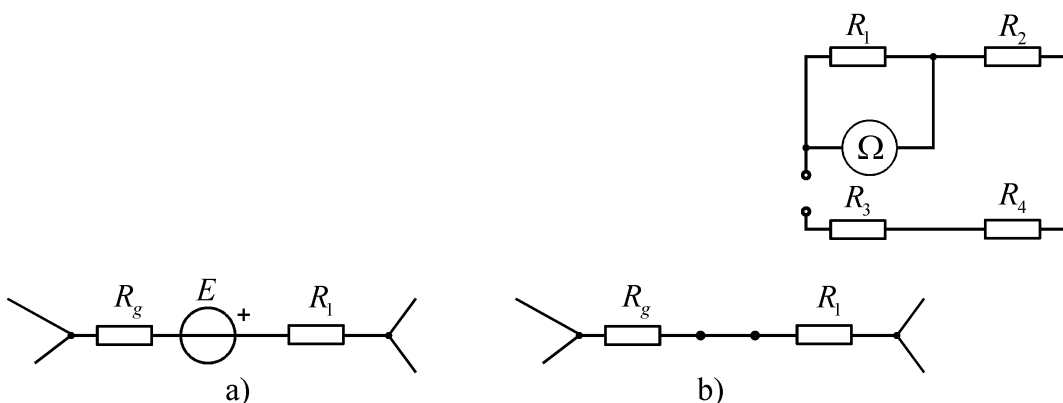
$$I_k = I'_k + I''_k + I'''_k + \dots$$

U prethodnom izrazu svaka od struja I'_k , I''_k , I'''_k , ... potiče od jednog generatora. Kada se računa struja koja potiče od jednog generatora, sve ostale generatore treba isključiti. Naponski generator se isključuje tako što se ukloni iz kola, a tačke između kojih je generator bio priključen se kratko spoje, kao što je ilustrovano na slici.



3.58 a) Idealni naponski generator i b) ekvivalentno kolo sa isključenim generatorom.

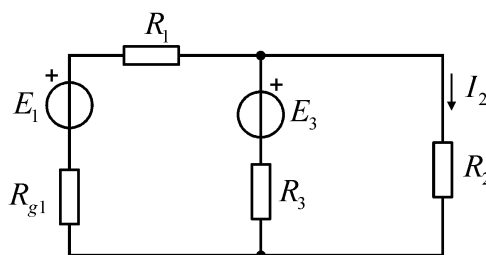
Ukoliko je u pitanju realni naponski generator tada njegova unutrašnja otpornost ostaje u kolu, kao što je ilustrovano na slici



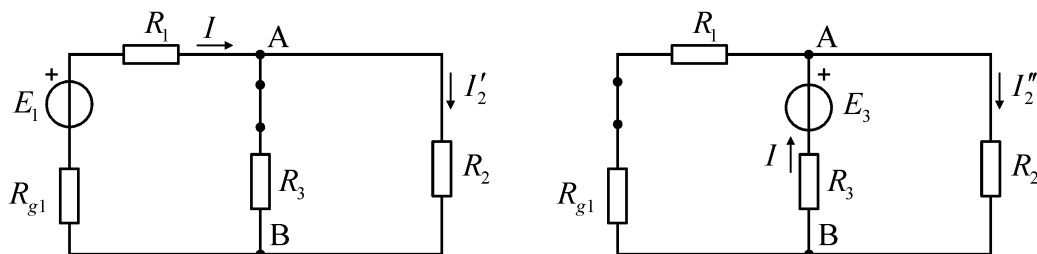
3.59 a) Realni naponski generator i b) ekvivalentno kolo sa isključenim generatorom.

Primer 3.43

U kolu prikazanom na slici odrediti jačinu struje I_2 u naznačenom referentnom smeru primenom teoreme superpozicije. $E_1 = 30\text{ V}$, $E_3 = 15\text{ V}$, $R_1 = 90\Omega$, $R_2 = R_3 = 100\Omega$, $R_{g1} = 10\Omega$.



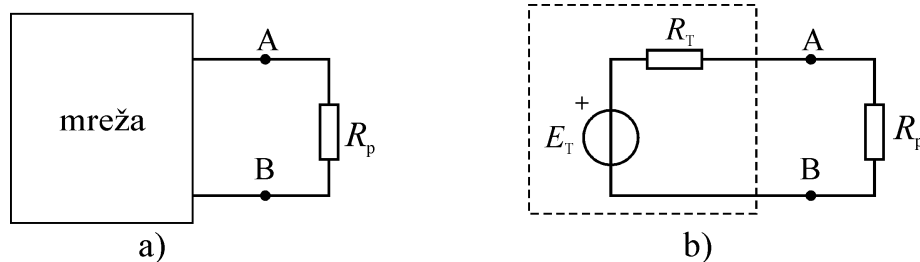
Rešenje. Struju I_2 ćemo naći tako što ćemo složeno kolo prikazano na slici rastaviti na dva prosta kola zato što imamo dva generatora. U prvom kolu je uključen samo generator ems E_1 , a u drugom samo generator ems E_3 , kao što je prikazano na sledećim slikama.



U prvom kolu se najpre nalazi ekvivalentna otpornost $R_{AB} = R_2 \parallel R_3 = 50\Omega$. Rešavajući prosto kolo $I = E_1 / (R_1 + R_{g1} + R_{AB}) = 30 / 150 = 0,2\text{ A}$. $U_{AB} = IR_{AB} = 10\text{ V}$, a $I'_2 = U_{AB} / R_2 = 0,1\text{ A}$. U drugom kolu ekvivalentna otpornost $R_{AB} = R_2 \parallel (R_1 + R_{g1}) = 50\Omega$. Rešavajući prosto kolo $I = E_3 / (R_3 + R_{AB}) = 15 / 150 = 0,1\text{ A}$. $U_{AB} = IR_{AB} = 5\text{ V}$, a $I''_2 = U_{AB} / R_2 = 0,05\text{ A}$. Ukupna struja $I_2 = I'_2 + I''_2 = 0,15\text{ A}$. ■

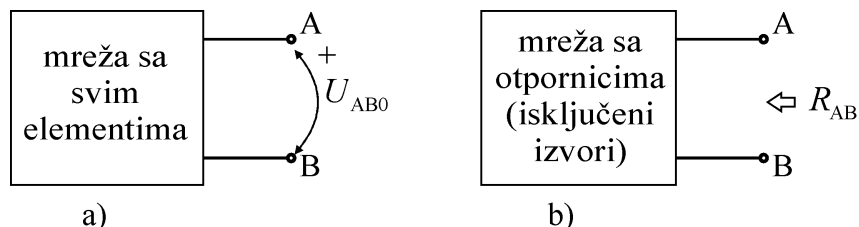
3.25. Tevenenova teorema

Na slici 3.60.a je prikazano električno kolo u kome je izdvojena jedna grana kola označena tačkama A i B. Kada se iz kola isključi jedna grana, na primer grana sa prijemnikom otpornosti R_p , tada se dobije mreža i priključni krajevi mreže A i B. Francuski naučnik Tevenen je pokazao da se svaka električna mreža sa otpornicima i jednim ili više generatora u odnosu na izabran par krajeva može zameniti realnim naponskim generatorom, kao na primer između krajeva A i B u kolu prikazanom na slici 3.60.b.



3.60 a) Originalno kolo i b) ekvivalentno kolo.

Taj ekvivalentni generator naziva se Tevenenov generator. Elektromotorna sila Tevenenovog generatora se određuje računanjem napona između otvorenih krajeva mreže tako što se ukloni grana sa prijemnikom, slika 3.61.a. Pri tome je $E_T = U_{AB0}$. Unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora se određuje računanjem ekvivalentne otpornosti između otvorenih krajeva mreže u kojoj su isključeni svi generatori i grana sa prijemnikom, slika 3.61.b. Pri tome je $R_T = R_{AB0}$.

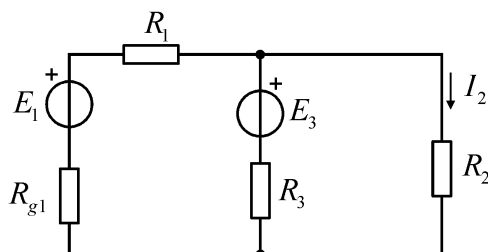


3.61 Određivanje: a) ems i b) unutrašnje otpornosti Tevenenovog generatora.

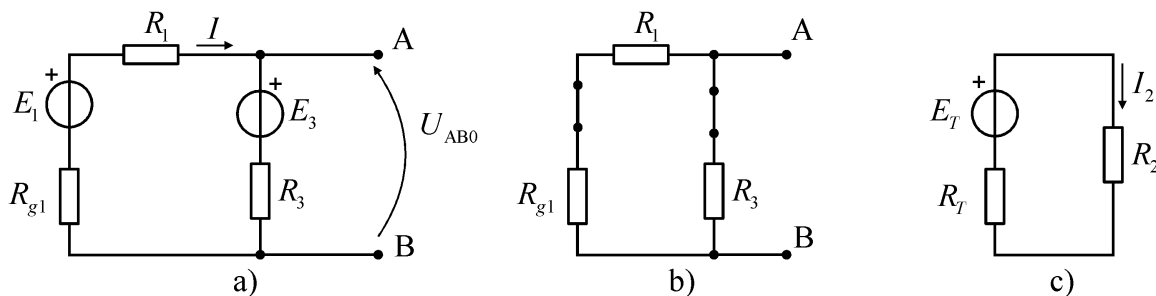
Primenom Tevenenove teoreme je moguće bilo koje složeno kolo zameniti ekvivalentnim prostim kolom u odnosu na izabranu granu, kao što je prikazano na slici 3.60.b. Ova teorema je veoma korisna pri analizi velikih električnih sistema gde se pojedini delovi sistema mogu zameniti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom i tako uprostiti složenost električnog sistema.

Primer 3.44

U kolu prikazanom na slici odrediti jačinu struje I_2 u naznačenom referentnom smeru primenom Tevenenove teoreme. $E_1 = 30\text{ V}$, $E_3 = 15\text{ V}$, $R_1 = 90\Omega$, $R_2 = R_3 = 100\Omega$, $R_{g1} = 10\Omega$.



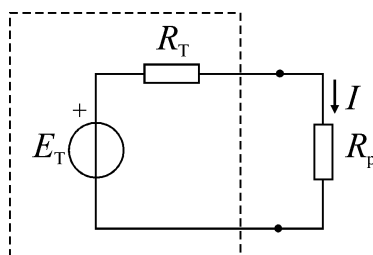
Rešenje. Najpre uklonimo granu u kojoj tražimo struju. U tako dobijenoj mreži tražimo napon i otpornost mreže između tačaka prekida. U mreži prikazanoj na sledećoj slici (a) određujemo ems Tevenenovog generatora E_T , a u mreži prikazanoj na slici (b) tražimo otpornost Tevenenovog generatora R_T .



U prostom kolu $I = (E_1 - E_3) / (R_1 + R_{g1} + R_3) = 0,075\text{ A}$, pa je $E_T = U_{AB0} = E_3 + IR_3 = 22,5\text{ V}$. Što se tiče ekvivalentne otpornosti između A i B sledi da je $R_T = R_{AB0} = R_3 \parallel (R_1 + R_{g1}) = 50\Omega$. Na kraju se dobija prosto kolo prikazano na istoj slici (c). U tom kolu jačina struje kroz prijemnik iznosi: $I_2 = E_T / (R_T + R_2) = 0,15\text{ A}$. ■

3.26. Prenos maksimalne snage

U električnim kolima je često potrebno preneti najveću moguću snagu prijemniku. Da bi snaga na prijemniku bila maksimalna, prijemnik mora imati tačno određenu otpornost i tada se naziva prilagođeni prijemnik. Ako se prijemnik priključuje na idealan naponski generator tada je snaga prijemnika po Džulovom zakonu $P_p = E^2/R_p$. Snaga prijemnika u takvom kolu je veća ukoliko mu je otpornost manja. Međutim u praksi su generatori realni i imaju unutrašnju otpornost. U takvim kolima snaga na prijemniku ima drugačiji izraz. U prethodnom poglavlju smo videli da se proizvoljna električna mreža u odnosu na priključke može uvek posmatrati kao realan naponski generator (Tevenenov generator). U ovom odeljku ćemo pokazati da se u takvim kolima na prijemniku razvija maksimalna snaga samo ako je otpornost prijemnika jednaka unutrašnjoj otpornosti ekvivalentnog Tevenenovog generatora (slika 3.62), $R_p = R_T$.



3.62 Maksimalna snaga na prijemniku se dobija ako je $R_p = R_T$.

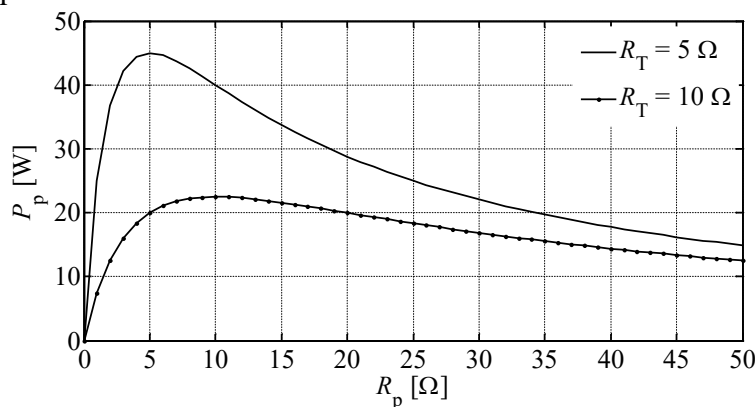
U kolu prikazanom na slici $I = E_T/(R_p + R_T)$. Napon na prijemniku je $U_p = R_p I$, odnosno

$$U_p = R_p \frac{E_T}{R_p + R_T}.$$

Za snagu potrošača $P_p = U_p I$ dobija se

$$P_p = R_p \frac{E_T^2}{(R_p + R_T)^2}.$$

Grafik zavisnosti snage P_p od otpornosti R_p pri konstantnim vrednostima Č: $E_T = 30V$, $R_T = 5\Omega$ i $R_T = 10\Omega$ je prikazan na slici. Sa slike se vidi da snaga dostiže maksimalnu vrednost za neko R_p a posle toga opada.



3.63 Snaga prijemnika u zavisnosti od njegove otpornosti.

Otpornost prijemnika za koju će snaga biti maksimalna, jednaka je otpornosti R_p za koju je prvi izvod prethodnog izraza jednak nuli,

$$\frac{dP_p}{dR_p} = E_T^2 \frac{(R_T + R_p)^2 - 2R_p(R_T + R_p)}{(R_T + R_p)^4} = E_T^2 \frac{(R_T - R_p)}{(R_T + R_p)^3} = 0.$$

Prethodni izraz jednak nuli ako je

$$R_p = R_T. \quad (3.27)$$

Prema tome, snaga prijemnika je maksimalna onda kada je otpornost prijemnika jednaka unutrašnjoj otpornosti ekvivalentnog Tevenenovog generatora. Ta maksimalna snaga jednaka je

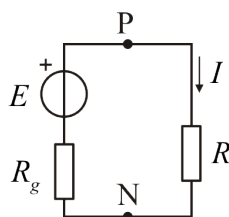
$$P_{p, \max} = \frac{E_T^2}{4R_T}.$$

Ovaj izraz pokazuje da je snaga prilagođenog prijemnika jednaka polovini snage generatora. Odnosno generator jednu polovinu snage potroši na unutrašnjoj otpornosti a drugu polovinu preda prijemniku.

Pri prenosu i distribuciji električne energije od elektrana do prijemnika (kućnih aparata) se ne vodi računa u prilagođenju po snazi. Otpornost prijemnika zavisi od njegove snage odnosno funkcije koju treba da obavi tako da nema smisla da se takvim prijemnicima namešta otpornost tako da odgovara otpornosti generatora. Prilagođenje po snazi se obično radi u audio i video tehnici, zatim u automatici, elektronici i telekomunikacijama. Na primer, audio uređaji se podešavaju tako da im je ekvivalentna Tevenenova otpornost jednaka otpornosti samih zvučnika. U elektronici se prilikom spajanja dva stepena (sklopa) podešava da izlazna otpornost prethodnog stepena odgovara ulaznoj otpornosti sledećeg stepena.

3.27. Strujni generator

U električnim kolima osim naponskih generatora, koje smo do sada upoznali, postoje i strujni generatori. To su takvi generatori koji održavaju uvek istu jačinu struje na svojim priključcima, bez obzira na ostale elemente u kolu. Oni mogu da se zamisle kao naponski generatori jako velike unutrašnje otpornosti. Posmatrajmo električno kolo prikazano na slici 3.64, sastavljeno od generatora ems E , unutrašnje otpornosti R_g i potrošača otpornosti R .

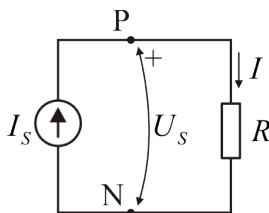


3.64 Električno kolo uz objašnjenje strujnog generatora.

Jačina struje u kolu je $I = E / (R_g + R)$, gde se jasno vidi da jačina struje zavisi kako od generatora (E, R_g) tako i od prijemnika R . Ukoliko je unutrašnja otpornost generatora mnogo puta veća od otpornosti potrošača $R_g \gg R$, tada se otpornost potrošača može zanemariti. U tom slučaju jačina struje kroz priključke generatora P i N je približno jednaka

$$I \approx \frac{E}{R_g}.$$

Električni generator, kod kojih jačina struje kroz priključke generatora ne zavisi od otpornosti priključenog prijemnika, zovu se strujni generator. Na slici 3.65 je prikazano prosto kolo gde je prijemnik priključen na strujni generator.

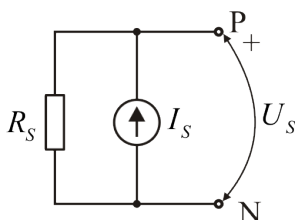


3.65 Prosto kolo sa strujnim generatorom.

Smer struje i jačina struje kroz prijemnik je u potpunosti određena strujom strujnog generatora, $I = I_S$. Napon između P i N priključaka strujnog generatora, U_S , zavisi od otpornosti prijemnika priključenog na sam generator. Primenom Omovog zakona na otpornik otpornosti R sledi da je

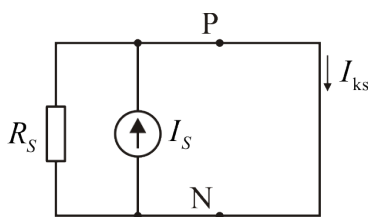
$$U_S = U_{PN} = RI = RI_S.$$

Ukoliko je u električnim kolima potrebno uzeti u obzir i unutrašnju otpornost strujnog generatora tada se otpornik kojim se modeluje ta unutrašnja otpornost vezuje paralelno sa strujnim generatorom, kao što je prikazano na slici 3.66.



3.66 Električna šema realnog strujnog generatora.

Elemente realnog strujnog generatora I_S i R_S je moguće odrediti iz elemenata realnog naponskog generatora. U odeljku 3.15.2 smo pokazali da je struja kratkog spoja naponskog generatora $I_{ks} = E/R_g$. Struju kratkog spoja strujnog generatora bi dobili kada bi kratko spojili priključke P i N, kao što je prikazano u kolu na slici 3.67.



3.67 Električna šema realnog strujnog generatora u režimu kratkog spoja.

Kratkom vezom su tačke P i N dovodene na isti potencijal pa je $U_{PN} = 0$. Samim tim je i struja kroz unutrašnju otpornost R_S jednaka nuli. To dalje znači da sva struja I_S ide kroz tu kratku vezu, odnosno $I_{ks} = I_S$. Poredeći izraze za struje kratkog spoja naponskog i strujnog generatora sledi da je

$$I_S = \frac{E}{R_g} \quad (3.28)$$

U odeljku 3.15.1 smo pokazali da je napon na priključcima naponskog generatora u režimu praznog hoda je jednak njegovoj ems, odnosno $U_{PN} = E$. U slučaju strujnog generatora u

praznom hodu (slika 3.66), kada na generator nije priključen prijemnik, sva struja I_s protiče kroz unutrašnju otpornost R_s . Prema tome, napon na priključcima strujnog generatora u režimu praznog hoda je $U_{\text{PN}} = R_s \cdot I_s$. Iz prethodnih jednakosti sledi da je

$$I_s = \frac{E}{R_s}. \quad (3.29)$$

Poredeći izraze (3.28) i (3.29) sledi da je

$$R_s = R_g. \quad (3.30)$$