

6. Trofazni sistem

Generatori i prijemnici sa kojima smo se do sada susretali imali su dva priključka. Takvi generatori i prijemnici nazivaju se monofazni ili jednofazni, a sistemi u kojima deluju monofazni ili jednofazni sistemi. Međutim, moguće je realizovati i generatore i prijemnike sa više od dva priključka. Takvi generatori i prijemnici se nazivaju polifazni ili višefazni elementi. Sistemi u kojima oni deluju nazivaju se polifazni odnosno višefazni sistemi.

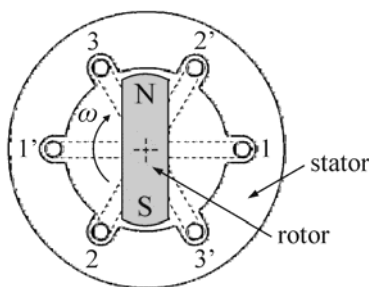
Polifazni generator i polifazni prijemnik se međusobno povezuju sistemom provodnika koji se naziva polifazni vod.

Trofazni sistem čini osnovu elektroenergetskog sistema koji snabdeva industriju i sve ostale potrošače električnom energijom. Trofazni sistem je jedan od najznačajnijih pronalazaka Nikole Tesle (1856-1943). Ovaj sistem omogućava znatno lakši i efikasniji prenos električne energije.

6.1. Trofazni generator

Na slici 6.1 prikazan je poprečni presek trofaznog generatora. Generator se sastoji od statora sa tri grupe namotaja ($11'$, $22'$ i $33'$) i rotora koji je stalni magnet ili elektromagnet (u kom slučaju se napaja vremenski konstantnom strujom).

Za obrtanje rotora generatora koristi se snaga vode u hidro turbinama, snaga vodene pare u parnim turbinama, snaga vetra u vetrogeneratorima, itd. Zajedno sa rotorom, rotira i njegovo magnetsko polje. U namotajima na statoru se indukuju tri elektromotorne sile istih efektivnih vrednosti i iste učestanosti, koje su fazno pomerene jedna u odnosu na drugu za 120° , odnosno $2\pi/3$. Fazni pomeraj između ovih elektromotornih sila je posledica prostornog razmeštaja namotaja na statoru.



Slika 6.1. Poprečni presek trofaznog generatora.

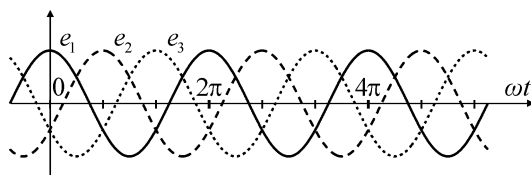
U praksi se teži da efektivne vrednosti elektromotornih sila trofaznog generator budu jednake i da fazne razlike svake dve uzastopne elektromotorne sile budu jednake. Takav sistem elektromotornih sila naziva se simetričan sistem.

Vremenski oblici simetričnog sistema elektromotornih sila glase (slika 6.2)

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \sqrt{2}E \cos \omega t, \\ e_2(t) &= \sqrt{2}E \cos(\omega t - 2\pi/3), \\ e_3(t) &= \sqrt{2}E \cos(\omega t - 4\pi/3). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Njihovi kompleksni predstavnici su

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 &= E e^{j0} = E, \\ \underline{E}_2 &= E e^{-j2\pi/3}, \\ \underline{E}_3 &= E e^{-j4\pi/3}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

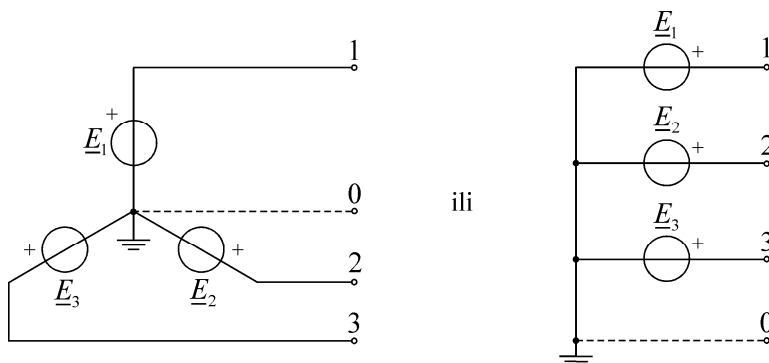


Slika 6.2. Vremenski oblik elektromotnih sila u trofaznom generatoru.

Zbir trenutnih vrednosti elektromotnih sila u trofaznom generatoru jednak je nuli, $e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$. Zbir kompleksnih predstavnika elektromotnih sila takođe je jednak nuli, $\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0$.

6.1.1. Veza generatora u zvezdu

Trofazni generator se na električnim šemama predstavlja pomoću tri naponska generatora. Namotaji generatora su obično spojeni u vezu koja se naziva zvezda. Električna šema trofaznog generatora spojenog u zvezdu prikazana je na slici 6.3.

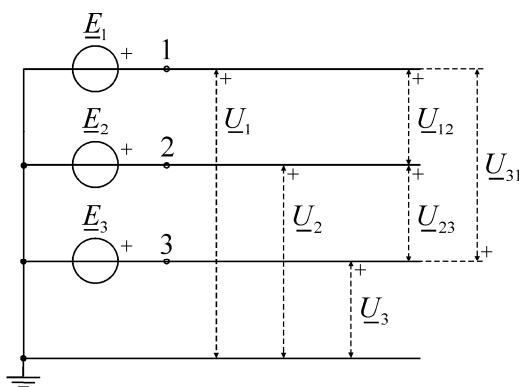


Slika 6.3. Električna šema trofaznog generatora spojenog u zvezdu.

Kod veze generatora u zvezdu svi namotaji generatora su jednim svojim krajem spojeni u jednu tačku koja se naziva zvezdište. Zvezdište se obično uzemljuje i sa njega se može, ali ne mora, voditi tzv. nulti (neutralni) provodnik. Provodnici koji se vode sa preostalih krajeva generatora nazivaju se fazni provodnici ili samo faze.

6.1.2. Fazni i međufazni naponi

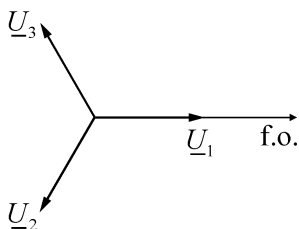
Naponi između bilo kog faznog provodnika i nultog provodnika nazivaju se fazni naponi i označavaju se sa $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_3$. Ako je unutrašnja impedansa generatora zanemarljivo mala, fazni naponi su jednaki elektromotornim silama u namotajima generatora (slika 6.4), $\underline{U}_1 = \underline{E}_1$, $\underline{U}_2 = \underline{E}_2$ i $\underline{U}_3 = \underline{E}_3$. Zbir faznih napona jednak je nuli, $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$.



Slika 6.4. Fazni i međufazni naponi.

Ako među faznim naponima postoji fazni pomeraj od 0° , -120° , -240° , sistem se naziva sistem sa pozitivnim (direktnim) redosledom faza. Ako su fazni pomeraji 0° , 120° , 240° , sistem se naziva sistem sa negativnim (inverznim) redosledom faza.

Fazorski dijagram faznih napona $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_3$ u slučaju simetričnog sistema sa pozitivnim redosledom faza prikazan je na slici 6.5.

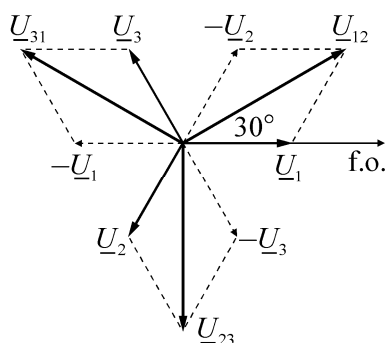


Slika 6.5. Fazorski dijagram faznih napona u simetričnom trofaznom sistemu.

Međufazni naponi su naponi između bilo koja dva fazna provodnika (slika 6.4)

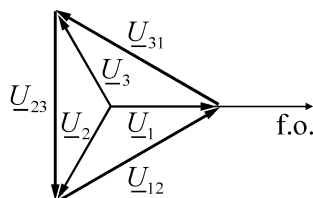
$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_1 - \underline{U}_2, \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_2 - \underline{U}_3, \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_3 - \underline{U}_1.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Međufazni naponi se još nazivaju i linijski naponi. Fazorski dijagram međufaznih napona $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ i $\underline{U}_{31}$ u slučaju simetričnog sistema sa pozitivnim redosledom faza prikazan je na slici 6.6. Sa slike 6.6 se može uočiti da međufazni naponi prednjače svojim faznim naponima za 30° ($\pi/6$) i da su $\sqrt{3}$ puta veći od faznih napona, $U_{12} = U_{23} = U_{31} = \sqrt{3} U_1$.



Slika 6.6. Međufazni i fazni naponi u simetričnom trofaznom sistemu.

Na slici 6.6. međufazni naponi su predstavljeni u tzv. zvezdastom obliku. Međufazni naponi predstavljeni u tzv. linijskom obliku prikazani su na slici 6.7.



Slika 6.7. Međufazni naponi prikazani u linijskom obliku.

Uobičajeno je da se niskonaponski trofazni sistem označava sa $3 \times 400/230 \text{ V}$ (međufazni napon 400 V , fazni napon 230 V). Pod nominalnim naponom trofaznog sistema podrazumeva se efektivna vrednost međufaznog napona. Na primer, nominalni napon u niskonaponskom trofaznom sistemu je 400 V . Efektivne vrednosti i amplitude (maksimalne vrednosti) faznih i međufaznih napona su:

- efektivna vrednost faznog napona: $U_1 = 230 \text{ V}$,
- amplituda faznog napona: $U_{1m} = \sqrt{2} U_1 = 1,41 \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V}$,
- efektivna vrednost međufaznog napona: $U_{12} = \sqrt{3} U_1 = 1,73 \cdot 230 \text{ V} = 400 \text{ V}$,
- amplituda međufaznog napona: $U_{12m} = \sqrt{2} U_{12} = 1,41 \cdot 400 \text{ V} = 565 \text{ V}$.

Frekvencija u elektroenergetskim sistemima kod nas i u svim evropskim zemljama je 50 Hz, dok je npr. u SAD 60 Hz.

6.2. *Potrošači u trofaznom sistemu*

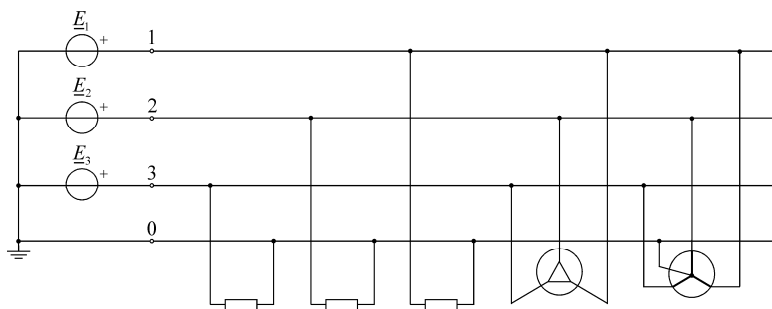
Trofazni potrošač se sastoji od tri impedanse koje se mogu vezati u zvezdu (Y) ili trougao (Δ).

Ukoliko su sve tri impedanse potrošača jednake, za potrošač se kaže da je simetričan. Tada i struje kroz impedanse čine simetričan sistem. Trofazni sistem kod koga i naponi i struje čine simetrične sisteme (istog redosleda: direktnog ili inverznog) naziva se simetričan (uravnotežen) trofazni sistem.

U slučaju nesimetričnog potrošača i trofazni sistem je nesimetričan. U praksi je vrlo teško postići da potrošači budu identični, ali se tome teži.

U slučaju veze generatora u zvezdu sa nultim provodnikom, na trofazni sistem se mogu priključiti i monofazni potrošači između jedne od faza i nultog provodnika. Ovo je slučaj sa većinom aparata i uređaja u domaćinstvu. Potrošači manjih snaga (do oko 3 kW) se obično prave kao monofazni, dok su potrošači većih snaga (termoakumulacione peći, štednjaci, protočni bojleri) obično trofazni. Trofazni potrošači mogu biti vezani u zvezdu ili trougao. Na slici 6.8 je prikazan primer složenog trofaznog kola sa jednim trofaznim generatorom i nekoliko trofaznih i monofaznih potrošača vezanih na isti trofazni vod.

Da bi u praksi trofazni sistem bio simetričan monofazni prijemnici se raspoređuju tako da opterećenja faza budu približno podjednaka.



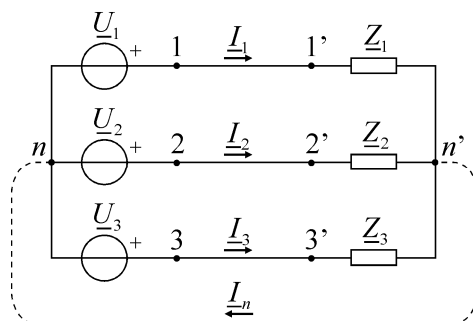
Slika 6.8. Primeri priključivanja potrošača u trofazno kolo.

6.2.1. *Veza potrošača u zvezdu*

Trofazni sistem čiji su i generator i potrošač vezani u zvezdu prikazan je na slici 6.9. Kada je potrošač vezan u zvezdu naponi na impedansama jednaki su faznim naponima.

U simetričnom trofaznom sistemu, i u zvezdištu generatora i u zvezdištu potrošača automatski je zadovoljen Prvi Kirhofov zakon. Zbog toga nulti provodnik u simetričnom trofaznom sistemu nije potreban. U simetričnom trofaznom sistemu struja nultog provodnika jednaka je nuli, $I_n = 0$. S obzirom da nije jednostavno postići idealno jednaku opterećenost faza, u domaćinstvima u nultom provodniku obično postoji neka slaba struja.

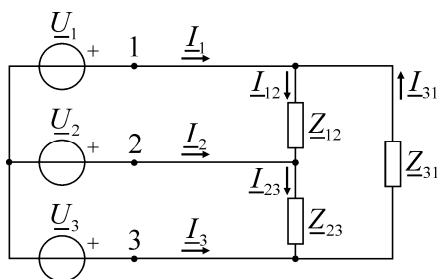
Kada je trofazni sistem sa slike 6.9 simetričan, tada su efektivne vrednosti napona svih generatora iste i intenziteti svih struja isti, pa su i snage svih potrošača iste. Zbog toga je u tom slučaju dovoljno analizirati samo jednu fazu. Sve ostale struje se nalaze faznim pomeranjem prve struje za -120° , odnosno -240° . U slučaju nesimetričnog potrošača, sistem treba rešavati kao složeno električno kolo sa tri generatora.



Slika 6.9. Trofazni sistem sa potrošačem vezanim u zvezdu i nultim provodnikom.

6.2.2. Veza potrošača u trougao

Trofazni potrošači se osim u zvezdu, mogu vezati i u trougao, kao na slici 6.10. Kada je potrošač vezan u trougao naponi na impedansama su jednaki međufaznim naponima.



Slika 6.10. Trofazni sistem sa potrošačima vezanim u trougao (delta vezu).

Primer 6.1

Posmatrajmo simetričan trofazni prijemnik vezan u trougao i priključen na simetričan sistem napona, kao na slici 6.11.

a) Na istom fazorskom dijagramu nacrtati sve međufazne napone.

b) Izračunati pokazivanje ampermetra.

Brojni podaci: $U_1 = U_2 = U_3 = 230 \text{ V}$ i $Z_D = (40 - j30) \Omega$.

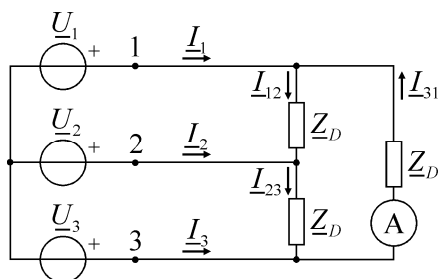
Rešenje.

a) Fazorski dijagram međufaznih napona prikazan je na slici 6.6.

b) Međufazni napon U_{31} je $\sqrt{3}$ puta veći od faznog, i iznosi $U_{31} = U_3 \sqrt{3} = 230 \sqrt{3} \text{ V} = 400 \text{ V}$. Ampermetar pokazuje efektivnu vrednost struje. Kako je $I_{31} = U_{31} / Z_D$, za efektivnu vrednost I_{31} struje I_{31} dobija se

$$I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_D} = \frac{400}{\sqrt{40^2 + 30^2}} = \frac{400}{50} = 8 \text{ A}.$$

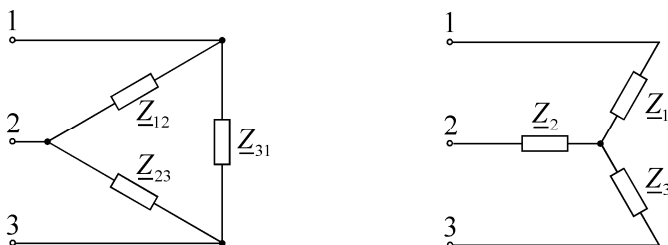
Prema tome, ampermetar će pokazati 8 A.



Slika 6.11. Analizirano trofazno kolo.

6.2.3. Transformacija zvezde u trougao ili trougla u zvezdu

Često je za lakše razumevanje i analizu kola potrebno potrošač vezan u trougao transformisati u potrošač vezan u zvezdu ili obrnuto. Ova transformacija je dozvoljena ako se pri tome ne menjaju struje i naponi u ostatku kola.



Slika 6.12. Uz transformaciju trougla u zvezdu i obrnuto.

Izrazi za transformaciju trougla u zvezdu su

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\Delta_z}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\Delta_z}, \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\Delta_z}, \quad (6.4)$$

gde je $\Delta_z = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}$.

Izrazi za transformaciju zvezde u trougao su

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\Delta_t}{\underline{Z}_3}, \quad \underline{Z}_{23} = \frac{\Delta_t}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{Z}_{31} = \frac{\Delta_t}{\underline{Z}_2}. \quad (6.5)$$

gde je $\Delta_t = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1$.

U slučaju simetričnih potrošača, $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_Y$ i $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_\Delta$, nakon transformacije zvezde u trougao, na osnovu izraza (6.5), dobija se da su impedanse prijemnika vezanog u trougao tri puta veće od impedansi prijemnika vezanog u zvezdu,

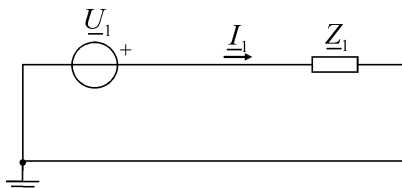
$$\underline{Z}_\Delta = 3\underline{Z}_Y. \quad (6.6)$$

6.3. Analiza trofaznih kola

Trofazno kolo čine bar jedan trofazni generator, trofazni vod i potrošač. U kolo mogu biti vezani i monofazni elementi (videti sliku 6.8).

Trofazna kola se mogu analizirati primenom Kirhofovih zakona (ili drugih metoda za rešavanje električnih kola), kao i bilo koja druga kola sa prostoperiodičnim strujama.

U slučaju simetričnog trofaznog sistema sa generatorom i prijemnikom vezanim u zvezdu (slika 6.9), zvezdišta se mogu kratko spojiti. Preuređenjem šeme mogu se dobiti tri prosta nezavisna kola, koja imaju samo jednu zajedničku tačku. Svako kolo se sastoji od jedne faze generatora, odgovarajućeg faznog provodnika i jedne faze prijemnika. Odgovarajuće prosto kolo za prvu fazu prikazano je na slici 6.13. Rešavanjem kola sa slike 6.13 dobija se struja u prvoj fazi $\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_1$. Zbog simetrije, struje druga dva kola (struje druge i treće faze) imaju iste efektivne vrednosti, ali su fazno pomerene za $-2\pi/3$, odnosno $-4\pi/3$, u odnosu na $\underline{I}_1$. Opisani postupak je poznat kao analiza svođenjem na jednu fazu, a moguć je u simetričnim trofaznim sistemima.



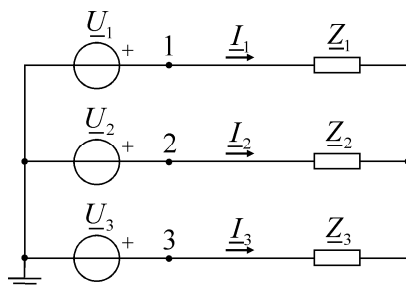
Slika 6.13. Izgled kola za prvu fazu.

U slučaju simetričnog trofaznog sistema sa potrošačem vezanim u trougao, trougao se može transformisati u zvezdu i primeniti prethodno opisana analiza svođenjem na jednu fazu.

Primer 6.2

Posmatrajmo simetričan trofazni prijemnik vezan u zvezdu i priključen na simetričan sistem napona, kao na slici 6.14. a) Izračunati fazne struje i b) nacrtati fazne struje i fazne napone na istom fazorskom dijagramu.

Brojni podaci: $U_1 = U_2 = U_3 = 230 \text{ V}$ i $Z_1 = Z_2 = Z_3 = (10 + j50)\Omega$.



Slika 6.14. Simetrično trofazno kolo sa potrošačem vezanim u zvezdu.

Rešenje.

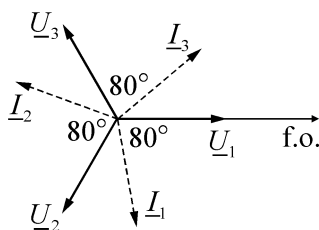
a) Kada je sistem simetričan, dovoljno je analizirati samo jednu fazu. Struja u prvoj fazi (videti sliku 6.13) jednaka je

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{Z_1} = \frac{230e^{j0^\circ}}{10 + j50} = \frac{23}{\sqrt{1^2 + 5^2}e^{j\arctan 5}} = 4,5e^{-j80^\circ} \text{ A.}$$

Ostale struje dobijaju se iz $\underline{I}_1$. Struja $\underline{I}_2$ fazno kasni za strujom $\underline{I}_1$ za 120° , dok $\underline{I}_3$ fazno kasni za strujom $\underline{I}_1$ za 240° ,

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120^\circ} = 4,5e^{-j200^\circ} \text{ A,} \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240^\circ} = 4,5e^{-j320^\circ} \text{ A.}$$

b) Sve struje imaju istu efektivnu vrednost i kasne iza svojih faznih napona za isti ugao od 80° (primetiti da je potrošač induktivnog karaktera). Fazorski dijagram faznih struja i faznih napona prikazan je na slici 6.15.



Slika 6.15. Fazorski dijagram.

6.4. Snage trofaznih generatora i prijemnika

Kada se govori o snazi trofaznog generatora, podrazumeva se ukupna snaga svih njegovih faza: trenutna, aktivna, reaktivna i kompleksna (za ove snage važi teorema održanja snage). Ta ukupna snaga se dobija sabiranjem snaga svih faza. Isto je i za prijemnik.

6.4.1. Popravka faktora snage u trofaznom sistemu

Popravka faktora snage u trofaznim sistemima se vrši slično kao i u monofaznim sistemima, ali u sve tri faze. U induktivnom trofaznom potrošaču, npr. trofaznom motoru, popravka faktora snage se vrši uz pomoć tri identična kompenzaciona kondenzatora. Cilj je da se anulira fazni pomeraj između napona i struje, u svakoj od faza na isti način.

S obzirom da su i ostali prijemnici najčešće induktivni, za popravku faktora snage u trofaznim elektrodistributivnim sistemima koriste se baterije kondenzatora i sinhroni kondenzatori.

6.5. Nesimetrični trofazni sistem

Nesimetrični režim rada trofaznog sistema nastaje kao posledica

- različitog opterećenja faza (nesimetričan prijemnik),
- nesimetričnih kratkih spojeva (između dve faze ili između faze i nule),
- prekida neke od faza i dr.

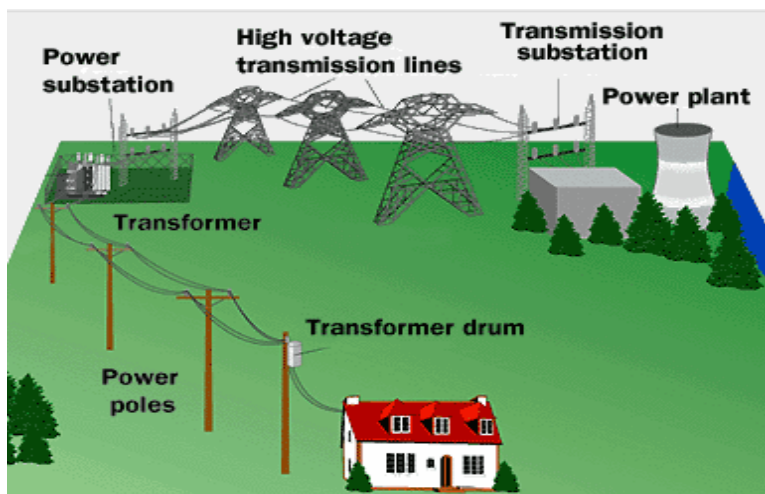
Ako impedanse prijemnika nisu jednake (nesimetričan prijemnik), tada ni struje kroz njih nisu jednake. Nesimetričan prijemnik može biti vezan u zvezdu sa nultim provodnikom ili bez njega, ali i u trougao.

6.6. Elektroenergetski sistem

Za prenos električne energije uglavnom se koriste prostoperiodični naponi i struje. Prednosti takvog prenosa električne energije su

- izrada generatora prostoperiodičnog napona je jednostavnija od izrade generatora konstantnog napona,
- za transformaciju napona i struja na višu ili nižu vrednost se koriste transformatori (koji rade samo pri vremenski promenljivoj struji).

Elektroenergetski sistem se sastoji iz delova za proizvodnju, prenos, distribuciju i potrošnju električne energije. Na slici 6.16 dat je šematski prikaz elektroenergetskog sistema.



Slika 6.16. Šematski prikaz elektroenergetskog sistema.

Za iskazivanje naponskih nivoa koji se koriste za prenos i distribuciju električne energije koriste se efektivne vrednosti međufaznih napona (fazni naponi su $\sqrt{3}$ puta manji).

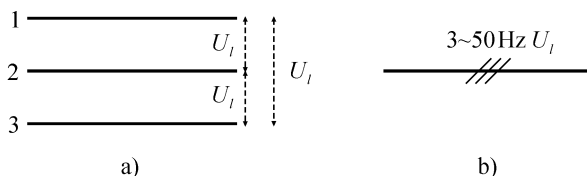
Prema nivoima napona, elektroenergetski sistem se deli na visokonaponski deo (VN), srednjenaponski deo (SN) i niskonaponski deo (NN). Visokonaponski deo elektroenergetskog sistema kod nas podrazumeva napone od 400kV, 220kV i 110kV, srednjenaponski napone od 35kV, 20kV i 10kV, a niskonaponski napon od 0,4kV (400V).

Za prenos električne energije kod nas se koriste visokonaponski dalekovodi naponskih nivoa 400kV, 220kV i 110kV. Za distribuciju električne energije koriste se distributivni vodovi naponskih nivoa 20kV i 10kV. U našim domovima i na radnim mestima koristi se niski napon.

U elektroenergetskom sistemu transformacija naponskih nivoa se vrši u trafostanicama. Transformacija visokog napona na srednji napon se vrši u trafostanicama koje se obično nalaze na ulazu u gradove. Transformacija srednjeg napona na niski napon (0,4kV) se vrši u distributivnim trafostanicama koje su lokalizovane u blizini potrošača.

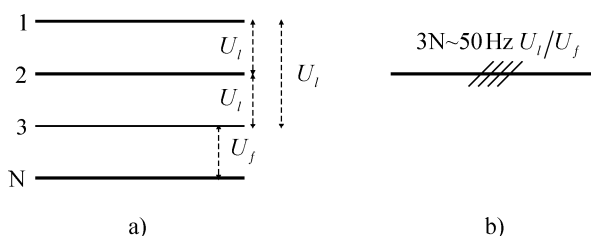
6.6.1. Sistemi napajanja

Sistemi napajanja za napone preko 1000 V su trofazni trožični sa tri linijska napona U_l . Trožični vod i odgovarajući grafički simbol koji se koristi u električnim šemama prikazani su na slici 6.17.



Slika 6.17. a) Trožični vod i b) grafički simbol za trožični vod.

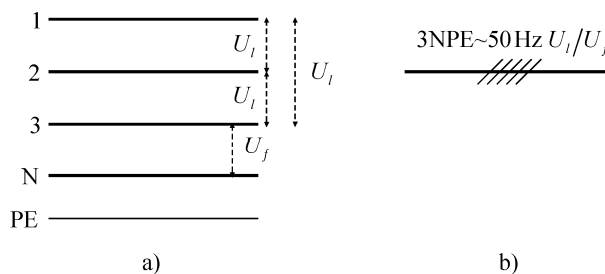
Sistemi napajanja za napone ispod 1000 V su trofazni četvorožični sa tri linijska napona U_l i tri fazna napona U_f . Četvorožični vod i odgovarajući grafički simbol koji se koristi u električnim šemama prikazani su na slici 6.18.



Slika 6.18. a) Četvorožični vod i b) grafički simbol za četvorožični vod.

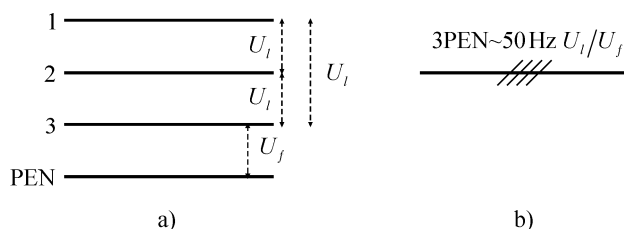
Iz razloga bezbednosti, u kućnim instalacijama se osim nultog provodnika postavlja i peti provodnik koji se koristi za uzemljivanje metalnih delova uređaja koji mogu doći u kontakt sa korisnicima. Sistemi napajanja sa posebnim zaštitnim provodnikom PE su petožični (slika 6.19). Zaštitni provodnik PE ima ulogu samo u slučaju kvara.

Izolacija na nultom provodniku je plave ili sive boje, na uzemljenom provodniku je žuto-zelene boje, dok se za fazne provodnike koriste žice sa izolacijama crne, braon ili neke druge boje.



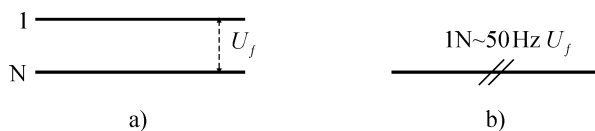
Slika 6.19. a) Petožični vod i b) grafički simbol za petožični vod.

Sistemi napajanja sa objedinjenom funkcijom neutralnog i zaštitnog provodnika PEN su četvorožični (slika 6.20). Ovakvi sistemi se koriste unutar objekta.



Slika 6.20. a) Četvorožični vod sa PEN provodnikom i b) grafički simbol.

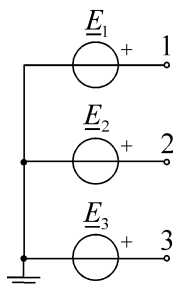
Jednofazni sistem napajanja je dvožični (slika 6.21.a). Odgovarajući grafički simbol prikazan je na slici 6.21.b.



Slika 6.21. a) Jednofazni sistem napajanja i b) grafički simbol.

6. Trofazni sistemi - zadaci

U namotajima trofaznog generatora se indukuju elektromotorne sile koje su fazno pomerene za po $2\pi/3$ radijana, odnosno za po 120° . Trofazni generator je obično spojen u zvezdu kao na slici 1.



Slika 1. Električna šema trofaznog generatora.

Suma trenutnih vrednosti elektromotornih sila trofaznog generatora jednaka je nuli, pa je i zbir kompleksnih efektivnih vrednosti elektromotornih sila generatora takođe jednak nuli,

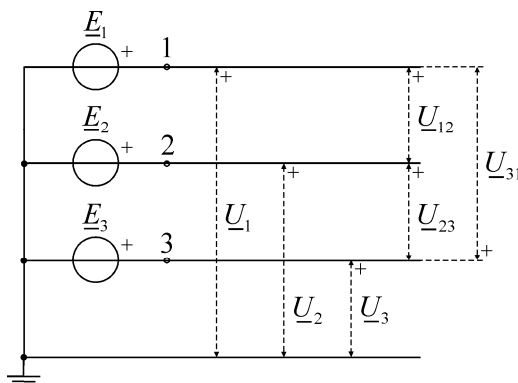
$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0. \quad (6.1)$$

Naponi faznih provodnika prema zemlji se nazivaju fazni naponi i označavaju se sa $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_3$ (slika 2). Međufazni naponi, kao što samo ime kaže, su naponi između faznih provodnika (slika 2),

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2, \quad (6.2)$$

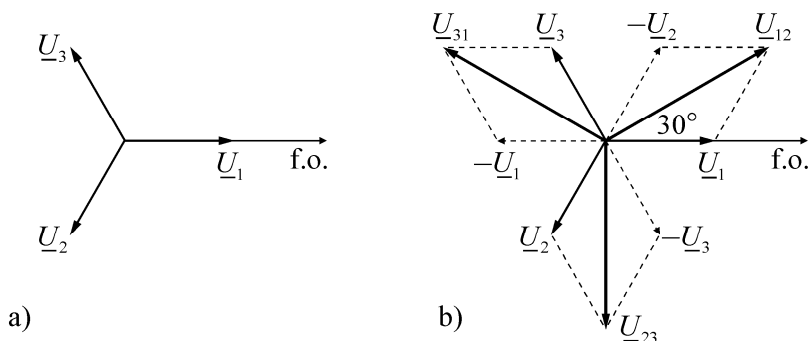
$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3, \quad (6.3)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1. \quad (6.4)$$



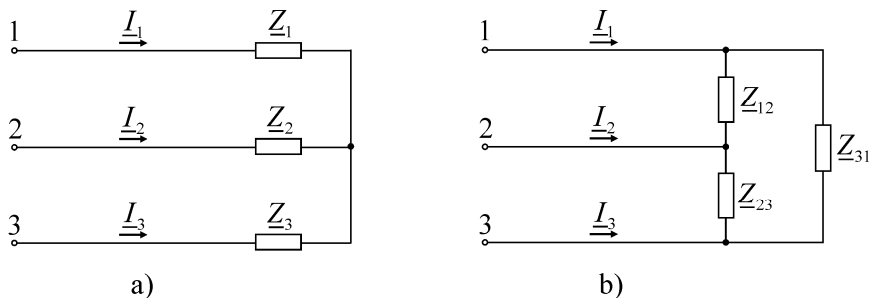
Slika 2. Fazni i međufazni naponi.

Ako između faznih napona $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_3$ postoji fazni pomeraj od 0° , -120° , -240° , kao na slici 3.a, sistem se naziva sistem sa pozitivnim (direktnim) redosledom faza. Ako su fazni pomeraji 0° , 120° , 240° , respektivno, sistem se naziva sistem sa negativnim (inverznim) redosledom faza. Sa slike 3.b se vidi da međufazni naponi prednjače svojim faznim naponima za po 30° i da su $\sqrt{3}$ puta veći od faznih napona.



Slika 3. Fazorski dijagrami a) faznih napona i b) faznih i međufaznih napona u simetričnom trofaznom sistemu sa pozitivnim redosledom faza.

Trofazni prijemnici se vezuju u zvezdu, kao na slici 4.a, ili u trougao, kao na slici 4.b.



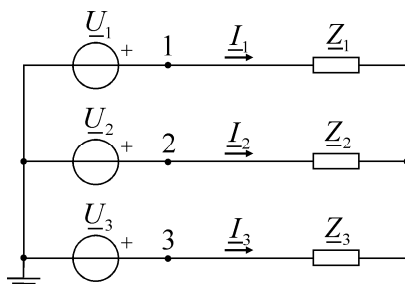
Slika 4. Prijemnik vezan a) u zvezdu i b) u trougao.

Simetričan trofazni sistem ima identične generatore i identične prijemnike. Zato su u simetričnom trofaznom kolu amplitude struja i napona svih generatora jednake. Kada su i generator i prijemnici vezani u zvezdu, dovoljno je analizirati samo jednu, najčešće prvu, fazu. U slučaju trofaznog sistema sa pozitivnim redosledom faza, sve ostale struje se nalaze faznim pomeranjem prve struje za -120° , odnosno -240° .

Zadatak 6.1

Trofazni prijemnik vezan u zvezdu priključen je preko trofaznog voda na trofazni generator kao na slici 6.1.1. Efektivne vrednosti faznih napona su $U_1 = U_2 = U_3 = 230 \text{ V}$, a impedanse prijemnika su $Z_1 = Z_2 = Z_3 = (10 + j20) \Omega$. Fazni naponi čine simetričan sistem sa direktnim redosledom faza.

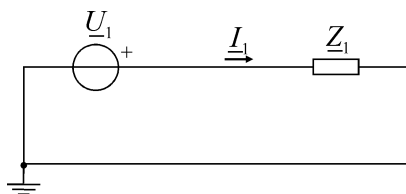
- Izračunati fazne struje trofaznog prijemnika.
- Na istom fazorskom dijagramu nacrtati fazne struje i fazne napone.



Slika 6.1.1. Simetrično trofazno kolo sa prijemnikom vezanim u zvezdu.

Rešenje.

a) Za simetričan trofazni sistem, kada su generator i prijemnik vezani u zvezdu, analiza sistema može se sprovesti svođenjem na jednu fazu. U simetričnom trofaznom sistemu potencijali zvezdišta generatora i zvezdišta prijemnika su jednaki, pa se ove dve tačke mogu kratko spojiti. Tako se dolazi do izgleda kola u jednoj fazi, kao na slici 6.1.2.



Slika 6.1.2. Izgled kola u jednoj fazi.

Impedansa Z_1 može se napisati u eksponencijalnom obliku na sledeći način

$$Z_1 = \sqrt{10^2 + 20^2} e^{j \arctg(20/10)} = 22,4 e^{j63,4^\circ} \Omega.$$

Struja u kolu prikazanom na slici 6.1.2 je

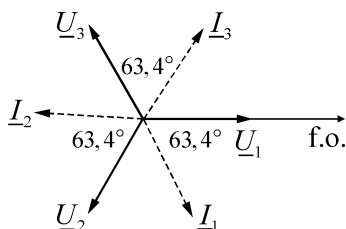
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{Z_1} = \frac{230 e^{j0^\circ}}{10 + j20} = \frac{230}{\sqrt{10^2 + 20^2} e^{j \arctg(20/10)}} = 10,3 e^{-j63,4^\circ} \text{ A}.$$

Za direktan redosled faza, struje u drugoj i trećoj fazi kasne za $\underline{I}_1$ za 120° , odnosno 240° , i jednake su

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120^\circ} = 10,3 e^{-j183,4^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240^\circ} = 10,3 e^{-j303,4^\circ} \text{ A} = 10,3 e^{j56,6^\circ} \text{ A}.$$

b) Sve struje imaju istu efektivnu vrednost i kasne iza svojih faznih napona za isti ugao od $63,4^\circ$. Primititi da je prijemnik induktivan, zbog čega fazne struje kasne iza svojih faznih napona. Fazorski dijagram faznih struja i faznih napona prikazan je na slici 6.1.2.



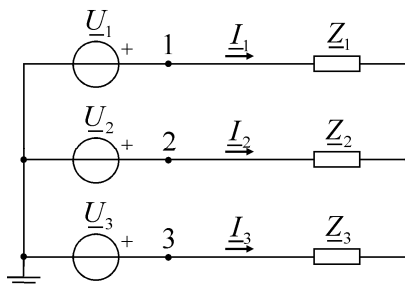
Slika 6.1.2. Fazorski dijagram.

Zadatak 6.2

U trofaznom kolu prikazanom na slici 6.2.1 efektivne vrednosti faznih napona su $U_1 = U_2 = U_3 = 230 \text{ V}$, a impedanse prijemnika su $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (10 - j30) \Omega$. Fazni naponi čine simetričan sistem sa direktnim redosledom faza.

a) Izračunati fazne struje trofaznog prijemnika.

b) Na istom fazorskom dijagramu nacrtati fazne struje i fazne napone.



Slika 6.2.1. Simetrično trofazno kolo sa prijemnikom vezanim u zvezdu.

Rešenje.

a) Sistem je simetričan i dovoljno je analizirati samo jednu fazu. Struja prve faze jednaka je

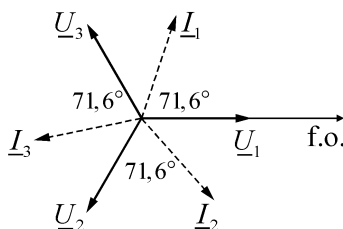
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230 e^{j0^\circ}}{10 - j30} = \frac{230}{\sqrt{10^2 + 30^2} e^{j \arctg(-30/10)}} = 7,3 e^{j71,6^\circ} \text{ A}.$$

Struje u drugoj i trećoj fazi kasne za $\underline{I}_1$ za 120° , odnosno 240° , i jednake su

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120^\circ} = 7,3 e^{-j48,4^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240^\circ} = 7,3 e^{-j168,4^\circ} \text{ A}.$$

b) Sve struje imaju istu efektivnu vrednost i prednjače ispred svojih faznih napona za isti ugao od $71,6^\circ$. U ovom zadatku prijemnik ima kapacitivni karakter zbog čega fazne struje prednjače ispred svojih faznih napona. Fazorski dijagram je prikazan na slici 6.2.2.



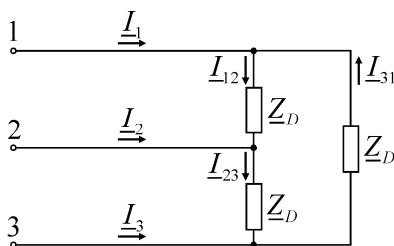
Slika 6.2.2. Fazorski dijagram.

Zadatak 6.3

Ponoviti prethodni zadatak za fazne napone koji čine simetričan sistem sa inverznim redosledom faza.

Zadatak 6.4

Na istom fazorskom dijagramu prikazati fazne i međufazne napone za trofaznu mrežu sa slike 6.4.1. Fazni naponi čine simetričan system sa direktnim redosledom faza. Brojni podaci: $U_1 = U_2 = U_3 = 230 \text{ V}$ i $\underline{Z}_D = (10 - j10) \Omega$.



Slika 6.4.1. Trofazni prijemnik vezan u trougao.

Rešenje.

Fazni naponi su

$$\underline{U}_1 = 230 e^{j0^\circ} = 230 \text{ V},$$

$$\underline{U}_2 = 230 e^{-j120^\circ},$$

$$\underline{U}_3 = 230 e^{-j240^\circ}.$$

Međufazni napon $\underline{U}_{12}$ jednak je

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = 230(1 - e^{-j120^\circ})V = 230(1 + e^{j60^\circ})V.$$

S obzirom da je

$$1 + e^{j60^\circ} = e^{j30^\circ}(e^{-j30^\circ} + e^{j30^\circ}) = 2e^{j30^\circ} \cos 30^\circ = \sqrt{3} e^{j30^\circ},$$

za $\underline{U}_{12}$ se dobija

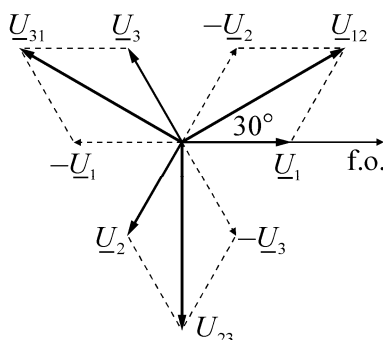
$$\underline{U}_{12} = 230\sqrt{3} e^{j30^\circ} V = 400 e^{j30^\circ} V.$$

Za direktan redosled faza, naponi $\underline{U}_{23}$ i $\underline{U}_{31}$ kasne za 120° , odnosno 240° , u odnosu na $\underline{U}_{12}$,

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} e^{-j120^\circ} = 400 e^{-j90^\circ} V,$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} e^{-j240^\circ} = 400 e^{-j210^\circ} V.$$

Efektivna vrednost međufaznih napona je $\sqrt{3}$ puta veća od efektivne vrednosti faznih napona. Međufazni naponi prednjače svojim faznim naponima za po 30° . Fazorski dijagram faznih i međufaznih napona prikazan je na slici 6.4.2.

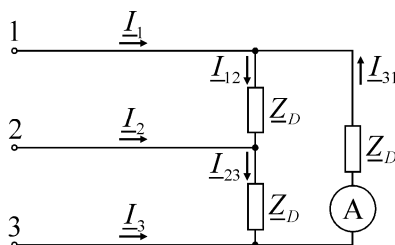


Slika 6.4.2. Fazorski dijagram faznih i međufaznih napona.

Zadatak 6.5

U trofaznom kolu prikazanom na slici 6.5.1 poznato je $U_1 = U_2 = U_3 = 230 V$ i $Z_D = (10 - j10)\Omega$. Fazni naponi čine simetričan sistem sa direktnim redosledom faza.

- Odrediti struje $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ i $\underline{I}_{31}$.
- Odrediti pokazivanje ampermetra.
- Na istom fazorskom dijagramu predstaviti međufazne napone i struje $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ i $\underline{I}_{31}$.



Slika 6.5.1. Trofazni prijemnik vezan u trougao.

Rešenje.

a) Struja $\underline{I}_{12}$ jednaka je količniku međufaznog napona $\underline{U}_{12}$ i impedanse $\underline{Z}_D$,

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_D} = \frac{230\sqrt{3}e^{j30^\circ}}{\sqrt{10^2 + 10^2}e^{j\arctan(-1)}} = 28,2e^{j30^\circ}e^{j45^\circ} = 28,2e^{j75^\circ} \text{ A.}$$

Struja $\underline{I}_{12}$ prednjači 45° ispred $\underline{U}_{12}$. Struje $\underline{I}_{23}$ i $\underline{I}_{31}$ dobijaju se faznim pomeranjem struje $\underline{I}_{12}$ za 120° , odnosno 240° ,

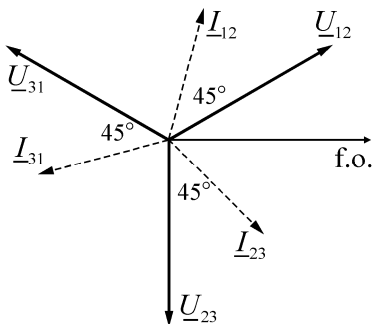
$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_{12}e^{-j120^\circ} = 28,2e^{-j45^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_{12}e^{-j240^\circ} = 28,2e^{-j165^\circ} \text{ A.}$$

b) Ampermetar meri efektivnu vrednost struje $\underline{I}_{31}$. Ova efektivna vrednost jednaka je količniku efektivne vrednosti međufaznog napona U_{31} i modula impedanse $\underline{Z}_D$,

$$I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_D} = \frac{230\sqrt{3}}{\sqrt{10^2 + 10^2}} = \frac{23\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 28,2 \text{ A.}$$

c) Sve struje imaju istu efektivnu vrednost i prednjače ispred svojih međufaznih napona za isti ugao od 45 stepeni. Fazorski dijagram međufaznih napona $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ i $\underline{U}_{31}$ i struja $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ i $\underline{I}_{31}$ prikazan je na slici 6.5.2.

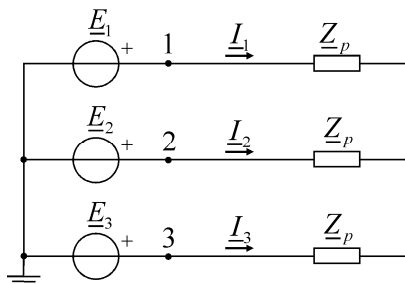


Slika 6.5.2. Fazorski dijagram.

Zadatak 6.6

Trofazni prijemnik vezan u zvezdu priključen je na trofazni generator, kao na slici 6.6.1. Poznate su efektivne vrednosti elektromotornih sila generatora $E_1 = E_2 = E_3 = 230 \text{ V}$ i impedanse $\underline{Z}_p = (20 + j50) \Omega$. Elektromotorne sile generatora čine simetričan sistem sa direktnim redosledom faza.

- Napisati kompleksni oblik sva tri fazna napona.
- Predstaviti fazore faznih napona na istom fazorskom dijagramu.
- Nacrtati prvu fazu kola i izračunati prvu faznu struju trofaznog potrošača.



Slika 6.6.1. Simetrično trofazno kolo sa prijemnikom vezanim u zvezdu.

Rešenje.

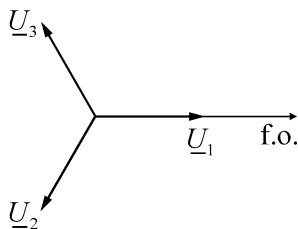
- a) Fazni naponi su

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 = 230 e^{j0^\circ} = 230 \text{ V},$$

$$\underline{U}_2 = \underline{E}_2 = 230 e^{-j120^\circ},$$

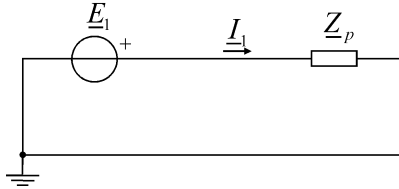
$$\underline{U}_3 = \underline{E}_3 = 230 e^{-j240^\circ}.$$

- b) Fazorski dijagram faznih napona je prikazan na slici 6.6.2.



Slika 6.6.2. Fazorski dijagram faznih napona.

c) Za simetričan trofazni sistem, kada su generator i prijemnik vezani u zvezdu, analiza sistema može se izvršiti svođenjem na jednu fazu. Izgleda kola u jednoj fazi prikazan je na slici 6.6.3.



Slika 6.6.3. Prva faza kola sa slike 6.6.1.

Struja u kolu prikazanom na slici 6.6.3 je ujedno i prva fazna struja,

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_p} = \frac{230e^{j0^\circ}}{20 + j50} = \frac{23}{\sqrt{2^2 + 5^2}e^{j\arctg(5/2)}} = 4,27e^{-j68,2^\circ} \text{ A.}$$

Zadatak 6.7

Ponoviti prethodni zadatak za $\underline{Z}_p = (20 - j50)\Omega$.

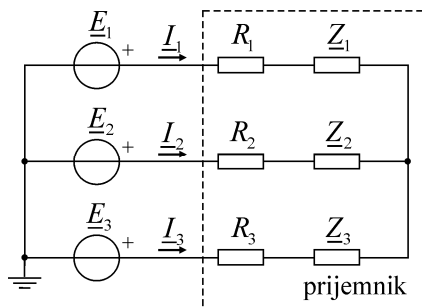
Rešenje.

$$\underline{I}_1 = 4,27e^{j68,2^\circ} \text{ A.}$$

Zadatak 6.8

U trofaznom kolu prikazanom na slici 6.8.1 efektivne vrednosti elektromotornih sila generatora su $E_1 = E_2 = E_3 = 230 \text{ V}$, otpornosti su $R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$ i impedanse su $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (20 + j30)\Omega$. Elektromotorne sile čine simetričan system sa direktnim redosledom faza.

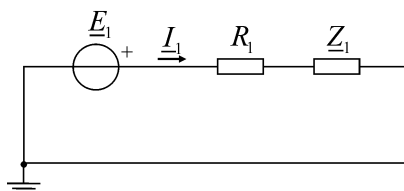
- Izračunati struje trofaznog prijemnika.
- Izračunati napone na impedansama $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, i $\underline{Z}_3$,
- Na istom fazorskom dijagramu nacrtati struje i napone generatora.



Slika 6.8.1. Simetrično trofazno kolo sa složenim prijemnikom vezanim u zvezdu.

Rešenje.

a) S obzirom da je sistem simetričan i da su generator i prijemnik vezani u zvezdu, analiza sistema može se sprovesti svođenjem na jednu fazu. Izgled kola u jednoj fazi prikazan je na slici 6.8.2.



Slika 6.8.2. Izgled kola u jednoj fazi.

Struja u kolu na slici 6.8.2 je

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + \underline{Z}_1} = \frac{230e^{j0^\circ}}{10 + 20 + j30} = \frac{230}{\sqrt{30^2 + 30^2} e^{j\arctg(30/30)}} = 5,4e^{-j45^\circ} \text{ A.}$$

Struje u drugoj i trećoj fazi kasne za 120° , odnosno 240° , u odnosu na $\underline{I}_1$,

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120^\circ} = 5,4e^{-j165^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240^\circ} = 5,4e^{-j285^\circ} \text{ A.}$$

b) Impedansa $\underline{Z}_1$ može se napisati u eksponencijalnom obliku na sledeći način

$$\underline{Z}_1 = \sqrt{20^2 + 30^2} e^{j\arctg(30/20)} = 36,1e^{j56,3^\circ} \Omega.$$

Napon na impedansi $\underline{Z}_1$ u prvoj fazi jednak je

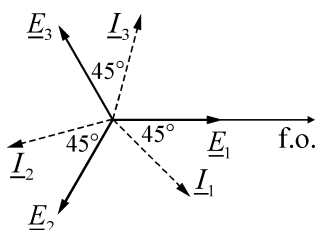
$$\underline{U}_{Z1} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = 36,1e^{j56,3^\circ} \cdot 5,4e^{-j45^\circ} = 195e^{j11,3^\circ} \text{ V.}$$

Naponi na impedansama $\underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_3$ u drugoj i trećoj fazi respektivno su

$$\underline{U}_{Z2} = \underline{U}_{Z1} e^{-j120^\circ} = 195e^{-j108,7^\circ} \text{ V,}$$

$$\underline{U}_{Z3} = \underline{U}_{Z1} e^{-j240^\circ} = 195e^{-j228,7^\circ} \text{ V.}$$

c) Sve fazne struje imaju istu efektivnu vrednost i kasne za elektromotornim silama generatora za isti ugao od 45 stepeni. Fazorski dijagram struja i napona generatora prikazan je na slici 6.8.3.

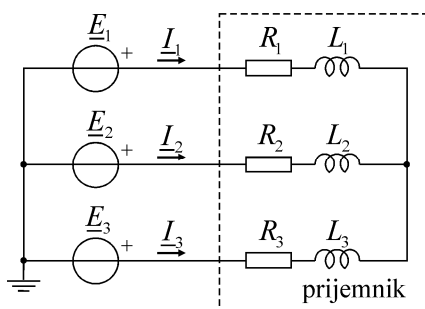


Slika 6.8.3. Fazorski dijagram.

Zadatak 6.9

U trofaznom kolu prikazanom na slici 6.9.1 efektivne vrednosti elektromotornih sila generatora su iste, $E_1 = E_2 = E_3 = 230 \text{ V}$, sve otpornosti su iste $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \Omega$ i sve induktivnosti prijemnika su iste, $L_1 = L_2 = L_3 = 1 \text{ H}$. Elektromotorne sile generator čine simetričan sistem sa direktniom redosledom faza. Frekvencija je jednaka frekvenciji gradske mreže (50 Hz).

- Odrediti kompleksne predstavnike struja trofaznog prijemnika.
- Odrediti kompleksni napon na otporniku R_1 .
- Odrediti kompleksni napon na kalemu L_1 .
- Na istom fazorskom dijagramu nacrtati struje i napone generatora.



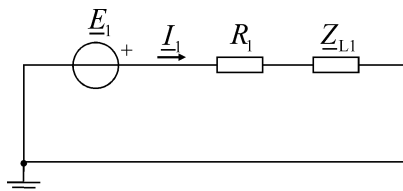
Slika 6.9.1. Simetrično trofazno kolo sa prijemnikom vezanim u zvezdu.

Rešenje.

- Frekvencija gradske mreže iznosi 50 Hz. Kružna frekvencija jednaka je $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$. Impedanse kalema jednake su

$$\underline{Z}_{L1} = \underline{Z}_{L2} = \underline{Z}_{L3} = j\omega L_1 = j314 \cdot 1 = j314 \Omega.$$

S obzirom da je sistem simetričan i da su generator i prijemnik vezani u zvezdu, analiza sistema može da se sprovede svodenjem na jednu fazu. Tako se dolazi do izgleda kola u jednoj fazi, kao na slici 6.9.2.



Slika 6.9.2. Izgled kola u jednoj fazi.

Struja u kolu prikazanom na slici 6.9.2 je

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + \underline{Z}_{L1}} = \frac{230 e^{j0^\circ}}{100 + j314} = \frac{230}{\sqrt{100^2 + 314^2} e^{j \arctg(314/100)}} = 0,7 e^{-j72,3^\circ} \text{ A}.$$

Ostale struje su iste kao $\underline{I}_1$, samo fazno kasne za 120, odnosno 240 stepeni,

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120^\circ} = 0,7 e^{-j192,3^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240^\circ} = 0,7 e^{-j312,3^\circ} \text{ A}.$$

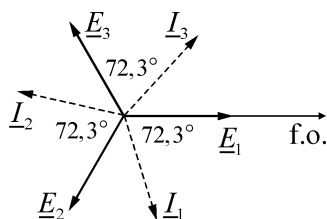
b) Kompleksni napon na otporniku R_1 jednak je

$$\underline{U}_{R1} = R_1 \underline{I}_1 = 100 \cdot 0,7 e^{-j72,3^\circ} = 70 e^{-j72,3^\circ} \text{ V}.$$

c) Kompleksni napon na impedansi $\underline{Z}_{L1}$ jednak je

$$\underline{U}_{L1} = \underline{Z}_{L1} \underline{I}_1 = j314 \cdot 0,7 e^{-j72,3^\circ} = 314 e^{j90^\circ} \cdot 0,7 e^{-j72,3^\circ} = 219,8 e^{-j17,7^\circ} \text{ V}.$$

d) Sve fazne struje imaju istu efektivnu vrednost i kasne za naponima generatora za isti ugao od 72,3 stepeni. Fazorski dijagram struja i napona generatora prikazan je na slici 6.9.3.

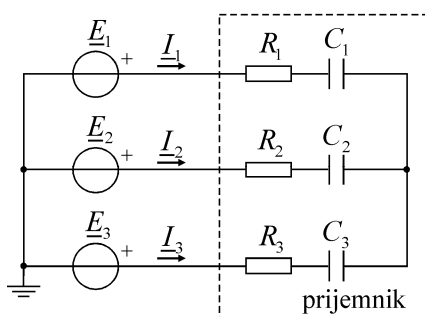


Slika 6.9.3. Fazorski dijagram.

Zadatak 6.10

U trofaznom kolu na slici 6.10.1, efektivne vrednosti elektromotornih sila su $E_1 = E_2 = E_3 = 230 \text{ V}$, otpornosti su $R_1 = R_2 = R_3 = 20 \Omega$ i kapacitivnosti su $C_1 = C_2 = C_3 = 100 \mu\text{F}$. Frekvencija je jednaka frekvenciji gradske mreže. Elektromotorne sile čine simetričan sistem sa direktnim redosledom faza.

- Odrediti kompleksne predstavnike struja trofaznog prijemnika.
- Odrediti kompleksni napon na otporniku R_2 .
- Odrediti kompleksni napon na kondenzatoru C_3 .
- Na istom fazorskom dijagramu nacrtati struje i napone generatora.



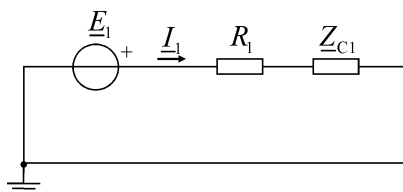
Slika 6.10.1. Simetrično trofazno kolo sa složenim prijemnikom vezanim u zvezdu.

Rešenje.

- Frekvencija gradske mreže iznosi 50 Hz . Kružna frekvencija jednaka je $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$. Impedanse kondenzatora jednake su

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_{C3} = -j \frac{1}{\omega C_1} = -j \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -j31,85 \Omega.$$

S obzirom da je sistem simetričan i da su generator i prijemnik vezani u zvezdu, analiza sistema može se sprovesti svođenjem na jednu fazu. Izgled kola u jednoj fazi prikazan je na slici 6.10.2.



Slika 6.10.2. Izgled kola u jednoj fazi.

Struja u kolu na slici 6.10.2 je

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + \underline{Z}_{C1}} = \frac{230e^{j0^\circ}}{20 - j31,85} = \frac{230}{\sqrt{20^2 + 31,85^2} e^{j\arctan(-31,85/20)}} = 6,1e^{j57,9^\circ} \text{ A.}$$

Struje u drugoj i trećoj fazi kasne za 120° , odnosno 240° ,

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120^\circ} = 6,1e^{-j62,1^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240^\circ} = 6,1e^{-j182,1^\circ} \text{ A.}$$

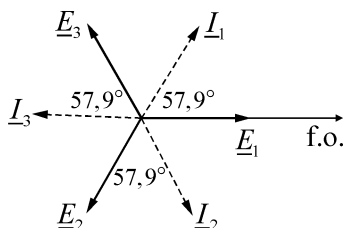
b) Kompleksni napon na otporniku R_2 jednak je

$$\underline{U}_{R2} = R_2 \underline{I}_2 = 20 \cdot 6,1e^{-j62,1^\circ} = 122e^{-j62,1^\circ} \text{ V.}$$

c) Kompleksni napon na kondenzatoru C_3 jednak je

$$\underline{U}_{C3} = \underline{Z}_{C3} \underline{I}_{31} = -j31,85 \cdot 6,1e^{-j182,1^\circ} = 31,85e^{-j90^\circ} \cdot 6,1e^{-j182,1^\circ} = 194,3e^{-j271,1^\circ} \text{ V.}$$

d) Sve fazne struje imaju istu efektivnu vrednost i prednjače naponima generatora za isti ugao od $57,9$ stepeni. Fazorski dijagram struja i napona generatora prikazan je na slici 6.10.3.



Slika 6.10.3. Fazorski dijagram.

Zadatak 6.11

Za kolo iz prethodnog zadatka nacrtati fazorske dijagrame

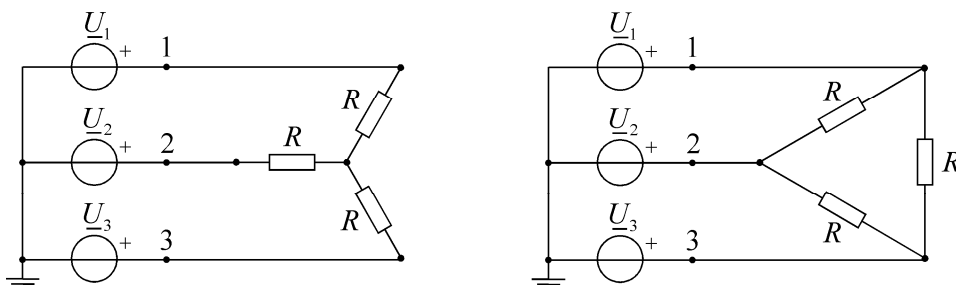
a) napona i struja otpornika i

b) napona i struja kondenzatora.

Zadatak 6.12

Na simetričnu trofaznu mrežu napona $U = 400\text{ V}$, priključena su tri otpornika otpornosti $R = 10\Omega$. Ovi otpornici su prvo vezani u zvezdu, a zatim u trougao, kao na slikama 6.12.1. Odrediti struje i snage otpornika kada su

- a) vezani u zvezdu, b) vezani u trougao,
c) Uporediti snage izračunate pod a) i b).



Slika 6.12.1. Simetrično trofazno kolo sa tri otpornika.

Rešenje.

Pod nominalnim naponom trofaznog sistema podrazumeva se efektivna vrednost međufaznog napona, koja na osnovu teksta zadatka iznosi 400 V . Fazni napon je $\sqrt{3}$ puta manji i iznosi oko 230 V .

- a) Pri sprezi otpornika u zvezdu efektivne vrednosti struja kroz otpornike su

$$I_Y = \frac{U_1}{R} = \frac{400}{10\sqrt{3}} = 23,094\text{ A}.$$

Snaga jednog otpornika jednaka je

$$P_{RY} = RI_Y^2 = 10 \cdot 23,094^2 = 5333\text{ W} = 5,333\text{ kW}.$$

Ukupna snaga sva tri otpornika vezana u zvezdu je tri puta veća i iznosi

$$P_Y = 3P_{RY} = 3 \times 5,333\text{ kW} = 16\text{ kW}.$$

- b) Pri sprezi otpornika u trougao efektivne vrednosti struja kroz otpornike su

$$I_\Delta = \frac{U_{12}}{R} = \frac{400}{10} = 40\text{ A}.$$

Snaga jednog otpornika jednaka je

$$P_{RA} = RI_\Delta^2 = 10 \cdot 40^2 = 16\text{ kW}.$$

Ukupna snaga sva tri otpornika vezana u trougao je tri puta veća i iznosi

$$P_\Delta = 3P_{RA} = 3 \times 16\text{ kW} = 48\text{ kW}.$$

- c) Ukupna snaga otpornika pri sprezi u trougao je tri puta veća od ukupne snage otpornika pri sprezi u zvezdu, $P_\Delta = 3P_Y$.

Zadatak 6.13

Na simetričnu trofaznu mrežu napona $U = 400\text{ V}$, priključena su dva simetrična prijemnika. Prvi prijemnik se sastoji od tri otpornika otpornosti $R_Y = 10\Omega$ vezana u zvezdu, a drugi od tri otpornika otpornosti $R_\Delta = 30\Omega$ vezana u trougao. Odrediti

- snagu prvog prijemnika,
- snagu drugog prijemnika.
- Uporediti snage izračunate pod a) i b).

Rešenje.

Na osnovu teksta zadatka međufazni napon iznosi 400 V , dok je fazni napon $\sqrt{3}$ puta manji i iznosi oko 230 V .

a) Za prvi prijemnik, pri sprezi otpornika u zvezdu, naponi na otpornicima su $400/\sqrt{3}\text{ V}$. Efektivne vrednosti struja ovih otpornika jednake su

$$I_Y = \frac{U_1}{R_Y} = \frac{400}{10\sqrt{3}} = 23,094\text{ A}.$$

Snaga jednog otpornika jednaka je

$$P_{RY} = R_Y I_Y^2 = 10 \cdot 23,094^2 = 5333\text{ W} = 5,333\text{ kW}.$$

Snaga prvog prijemnika iznosi

$$P_Y = 3P_{RY} = 3 \times 5,333\text{ kW} = 16\text{ kW}.$$

b) Za drugi prijemnik, pri sprezi otpornika u trougao, naponi na otpornicima su 400 V . Efektivne vrednosti struja ovih otpornika jednake su

$$I_\Delta = \frac{U_{12}}{R_\Delta} = \frac{400}{30} = 13,333\text{ A}.$$

Snaga jednog otpornika jednaka je

$$P_{R\Delta} = R I_\Delta^2 = 30 \cdot 13,333^2 = 5,333\text{ kW}.$$

Snaga drugog prijemnika iznosi

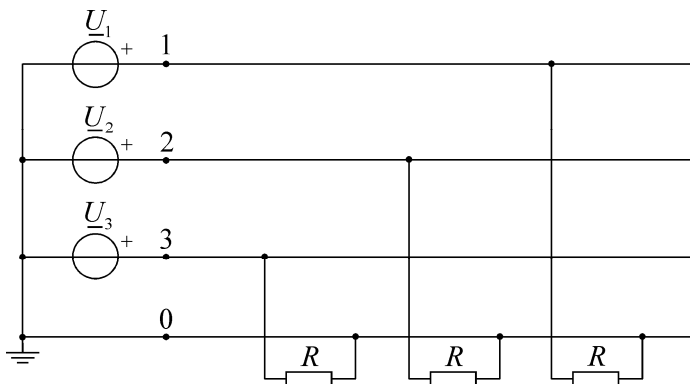
$$P_\Delta = 3P_{R\Delta} = 3 \times 5,333\text{ kW} = 16\text{ kW}.$$

- Snage izračunate pod a) i b) su jednake.

Primetiti da bi se transfiguracijom drugog prijemnika iz trougla u zvezdu dobio prvi prijemnik.

Zadatak 6.14

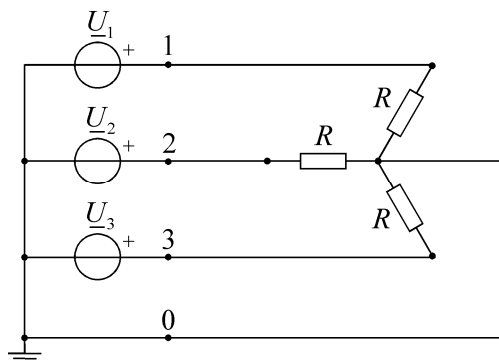
Na simetričnu trofaznu mrežu faznih napona $U_1 = U_2 = U_3 = 230 \text{ V}$ priključena su tri jednofazna prijemnika istih otpornosti $R = 11,5 \Omega$, kao na slici 6.14.1. Odrediti struje otpornika i njihove snage.



Slika 6.14.1. Simetrično trofazno kolo sa tri jednofazna prijemnika.

Rešenje.

Opisana veza tri jednofazna prijemnika može se interpretirati kao simetričan trofazni prijemnik vezan u zvezdu sa uzemljenim zvezdištem (slika 6.14.2).



Slika 6.14.2. Trofazni prijemnik vezan u zvezdu sa uzemljenim zvezdištem.

S obzirom da su otpornici u svim fazama isti, kolo je simetrično i može se analizirati svođenjem na jednu fazu. Efektivne vrednosti struja kroz otpornike su

$$I_R = \frac{U_1}{R} = \frac{230}{11,5} = 20 \text{ A.}$$

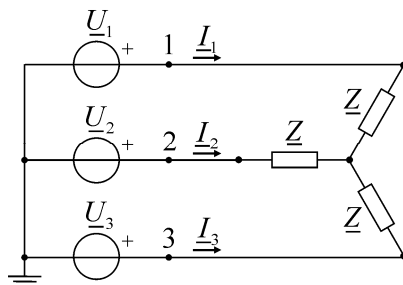
Snaga jednog jednofaznog prijemnika iznosi

$$P_R = RI_R^2 = 11,5 \cdot 20^2 = 2645 \text{ W} = 2,645 \text{ kW.}$$

Zadatak 6.15

Na simetričnu trofaznu mrežu napona $U = 400\text{ V}$, priključen je induktivni prijemnik vezan u zvezdu, čije impedanse po fazi iznose $\underline{Z} = (5 + j8,66)\Omega$, kao na slici 6.15.1. Odrediti

- kompleksne struje kroz impedanse,
- nacrtati fazorski dijagram napona i struja prijemnika,
- aktivnu i reaktivnu snagu svake impedanse,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu prijemnika.



Slika 6.15.1. Simetrično trofazno kolo sa prijemnikom vezanim u zvezdu.

Rešenje.

Na osnovu podataka u tekstu, međufazni naponi iznose 400 V , dok fazni naponi iznose $400/\sqrt{3}\text{ V}$. Fazni naponi su $\underline{U}_1 = 400/\sqrt{3} e^{j0^\circ}$, $\underline{U}_2 = 400/\sqrt{3} e^{-j120^\circ}$, $\underline{U}_3 = 400/\sqrt{3} e^{-j240^\circ}$.

Impedansa $\underline{Z} = (5 + j8,66)\Omega$ može se napisati u eksponencijalnom obliku,

$$\underline{Z} = (5 + j8,66) = \sqrt{5^2 + 8,66^2} e^{j\arctg(8,66/5)} = 10 e^{j60^\circ}.$$

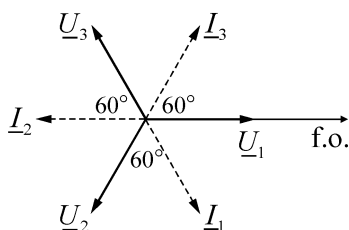
- a) Kompleksne struje kroz impedanse jednake su

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{400 e^{j0^\circ}}{\sqrt{3} \cdot 10 e^{j60^\circ}} = 23,094 e^{-j60^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j120^\circ} = 23,094 e^{-j180^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j240^\circ} = 23,094 e^{-j300^\circ} \text{ A}.$$

- b) Fazorski dijagram napona i struja prijemnika prikazan je na slici 6.15.2.



Slika 6.15.2. Fazorski dijagram.

c) Kompleksne snage sve tri impedanse $\underline{Z}$ su jednake, $\underline{S}_Z = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{U}_3 \underline{I}_3^*$, i mogu se odrediti na sledeći način

$$\underline{S}_Z = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = 230,94 e^{j0^\circ} \cdot (23,094 e^{-j60^\circ})^* = 5333 e^{j60^\circ} \text{ VA} = 5,333 e^{j60^\circ} \text{ kVA}.$$

Aktivna snaga jednaka je realnom delu kompleksne i iznosi

$$P_Z = \text{Re}\{\underline{S}_Z\} = 5333 \cos 60^\circ = 2667 \text{ W} = 2,667 \text{ kW}.$$

Reaktivna snaga jednaka je imaginarnom delu kompleksne snage i iznosi

$$Q_Z = \text{Im}\{\underline{S}_Z\} = 5333 \sin 60^\circ = 4619 \text{ var} = 4,619 \text{ kvar}.$$

d) Kompleksna, aktivna i reaktivna snaga trofaznog prijemnika mogu se odrediti sabiranjem snaga pojedinačnih impedansi. Prema tome, aktivna i reaktivna snaga trofaznog prijemnika su

$$P_Y = 3P_Z = 3 \times 2,667 \text{ kW} = 8 \text{ kW},$$

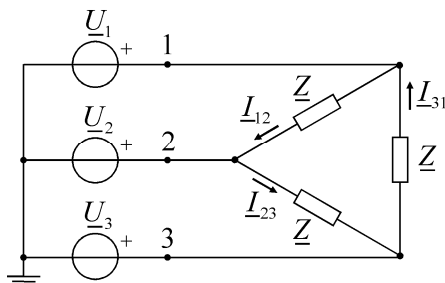
$$Q_Y = 3Q_Z = 3 \times 4,619 \text{ kvar} = 13,857 \text{ kvar}.$$

Prividna snaga trofaznog prijemnika jednaka je

$$S_Y = \sqrt{P_Y^2 + Q_Y^2} = \sqrt{8^2 + 13,857^2} \text{ kVA} = 16 \text{ kVA}.$$

Zadatak 6.16

Ponoviti prethodni zadatak ako su impedanse $\underline{Z} = (5 + j8,66) \Omega$ vezane u trougao, kao na slici 6.16.1.



Slika 6.16.1. Simetrično trofazno kolo sa prijemnikom vezanim u trougao.

Rešenje.

Kompleksni naponi na impedansama su međufazni naponi $\underline{U}_{12} = 400e^{j30^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_{23} = 400e^{-j90^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_{31} = 400e^{-j210^\circ} \text{ V}$.

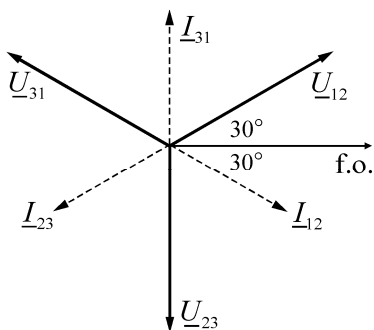
a) Kompleksne struje kroz impedanse jednake su

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{400e^{j30^\circ}}{10e^{j60^\circ}} = 40e^{-j30^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_{12}e^{-j120^\circ} = 40e^{-j150^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_{12}e^{-j240^\circ} = 40e^{-j270^\circ} \text{ A}.$$

b) Fazorski dijagram napona i struja prijemnika prikazan je na slici 6.16.2.



Slika 6.16.2. Fazorski dijagram.

c) Kompleksne snage sve tri impedanse $\underline{Z}$ su jednake i iznose

$$\underline{S}_Z = \underline{U}_{12}\underline{I}_{12}^* = 400e^{j30^\circ} \cdot (40e^{-j30^\circ})^* = 16e^{j60^\circ} \text{ kVA}.$$

Aktivna snaga i reaktivna snaga impedansi su

$$P_Z = \text{Re}\{\underline{S}_Z\} = 16 \cos 60^\circ \text{ kW} = 8 \text{ kW}.$$

$$Q_Z = \text{Im}\{\underline{S}_Z\} = 16 \sin 60^\circ \text{ kvar} = 13,86 \text{ kvar}.$$

d) Kompleksna, aktivna i reaktivna snaga trofaznog prijemnika mogu se odrediti sabiranjem snaga pojedinačnih impedansi,

$$P_\Delta = 3P_Z = 3 \times 8 \text{ kW} = 24 \text{ kW},$$

$$Q_\Delta = 3Q_Z = 3 \times 13,86 \text{ kvar} = 41,58 \text{ kvar}.$$

Prividna snaga trofaznog prijemnika jednaka je

$$S_\Delta = \sqrt{P_\Delta^2 + Q_\Delta^2} = \sqrt{24^2 + 41,58^2} \text{ kVA} = 48 \text{ kVA}.$$