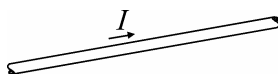


2. Vremenski konstantne struje

2.1. Električna kola vremenski konstantnih struja – zadaci

Prilikom analize električnih kola, stvarni smer struje u nekoj grani obično nije unapred poznat. Zato se za struju uvodi referentni smer, tj. pretpostavlja se smer struje u jednom od dva moguća smera, kao na slici 2.1. U odnosu na izabrani referentni smer struje, jačina struje može biti pozitivna ili negativna. Ako je u rezultatu jačina struje pozitivna onda su stvarni i referentni smer struje isti. Ako je jačina struje negativna onda je stvarni smer struje suprotan od referentnog.



Slika 2.1. Označavanje referentnog smera struje kroz provodnik.

Kraj otpornika u koji referentni smer struje ulazi nalazi se na višem potencijalu i označava se sa “+”, kao što je prikazano na slici 2.2.



Slika 2.2. Usklađeni referentni smerovi napona i struje na otporniku.

Idealan naponski generator održava stalan napon između svojih priključaka, bez obzira na struju kroz njega. Idealan strujni generator održava stalnu struju kroz sebe bez obzira na napon između njegovih priključaka.

Napon između krajeva idealnog naponskog generatora (slika 2.3) uvek je isti i jednak njegovoj elektromotornoj sili (ems), $U = E$. Na višem potencijalu je onaj kraj generatora koji je označen sa “+”. Kada je referentni smer struje takav da struja “izlazi” iz pozitivne elektrode generatora, snaga idealnog naponskog generatora određuje se iz izraza

$$P_E = EI_E. \quad (2.1)$$



Slika 2.3. Ako je smer struje takav da struja “izlazi” iz pozitivne elektrode generatora, snaga idealnog naponskog generatora određuje se kao $P_E = EI$.

Kada je referentni smer struje naponskog generatora takav da struja “ulazi” u pozitivnu elektrodu, snaga generatora određuje se iz izraza $P_E = -EI_E$.

U grani u kojoj deluje idealan strujni generator (slika 2.4), jačina struje jednaka je jačini struje strujnog generatora. Tačka iz koje struja “izlazi” je na višem potencijalu od drugog priključka. Snaga idealnog strujnog generatora određuje se iz izraza

$$P_S = U_S I_S. \quad (2.2)$$



Slika 2.4. Na strujnom generatoru, tačka iz koje struja “izlazi” je na višem potencijalu od drugog priključka.

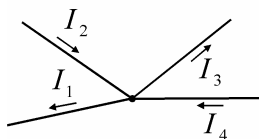
Prilikom rešavanja električnog kola potrebno je pretpostaviti smerovi struja u svim granama kola i obeležiti krajeve višeg potencijala na svim otpornicima i strujnim generatorima.

Čvor je mesto gde da spajaju najmanje tri žičana provodnika. Smer struje u provodnicima može biti u čvor ili iz čvora. Primer čvora prikazan je na slici 2.5.

Prvi Kirhofov zakon glasi: algebarski zbir svih jačina struja kroz provodnike koji se spajaju u jednom čvoru jednak je nuli. Matematička formulacija Prvog Kirhofovog zakona je

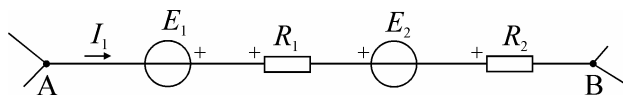
$$\sum I = 0. \quad (2.3)$$

Sa pozitivnim predznakom uzimaju se struje koje izlaze iz čvora, a sa negativnim predznakom struje koje ulaze u čvor. U primeru prikazanom na slici 2.5 je $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$.



Slika 2.5. Primer čvora.

Redna veza proizvoljnog broja elemenata između dva čvora naziva se grana kola. Primer grane prikazan je na slici 2.6. Jačina struje u grani je konstantna.



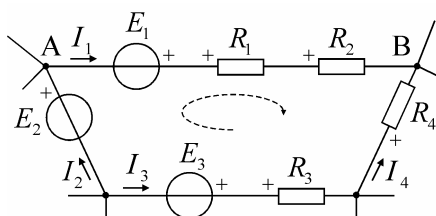
Slika 2.6. Primer grane električnog kola.

Zatvorenu konturu obrazuju grane kola. Primer zatvorene konture prikazan je na slici 2.7. Za zatvorenu konturu važi Drugi Kirhofov zakon.

Drugi Kirhofov zakon glasi: zbir napona između krajeva elemenata duž bilo koje zatvorene konture u električnom kolu jednak je nuli. Matematička formulacija Drugog Kirhofovog zakona je

$$\sum U = 0. \quad (2.4)$$

Smer obilaska konture bira se u jednom od dva moguća smera. Ukoliko se prilikom obilaska konture, u izabranom smeru, prvo naiđe na kraj elementa označen sa + (kraj elementa na višem potencijalu), napon na tom elementu uzima se sa pozitivnim predznakom. U suprotnom, napon na tom elementu uzima se sa negativnim predznakom. Za primer prikazan na slici 2.7, za označen smer obilaska konture, je $-E_1 + R_1 I_1 + R_2 I_1 - R_4 I_4 - R_3 I_3 + E_3 - E_2 = 0$.



Slika 2.7. Primer zatvorene konture.

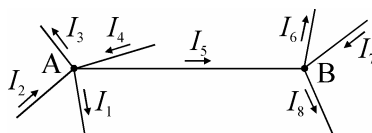
Napon između dve tačke u kolu jednak je zbiru napona na elementima, koji se nalaze između te dve tačke. Pri određivanju napona između dve tačke mora se voditi računa o smeru kojim se ide od jedne do druge tačke. Pravilo o predznacima je isto kao i za jednačine po Drugom Kirhofovom zakonu. U primeru prikazanom na slici 2.7 je $U_{AB} = -E_1 + R_1 I_1 + R_2 I_1$.

Za električno kolo sa n_c čvorova može da se napiše $(n_c - 1)$ nezavisna jednačina na osnovu Prvog Kirhofovog zakona. Za električno kolo sa n_c čvorova i n_g grana može da se napiše $n_g - (n_c - 1)$ nezavisna jednačina na osnovu Drugog Kirhofovog zakona. Ukupan broj nezavisnih jednačina koje mogu da se napišu na osnovu Prvog i Drugog Kirhofovog zakona jednak je broju grana u kolu, n_g .

Teorema održanja snage u električnim kolima vremenski konstantnih struja glasi: zbir snaga svih generatora u kolu jednak je zbiru snaga Džulovih gubitaka svih otpornika u kolu.

Zadatak 2.1

Napisati jednačine koje iskazuju Prvi Kirhofov zakon za dva čvora A i B prikazana na slici 2.1.1. Usvojeni referentni smerovi struja u svim provodnicima označeni su na slici.

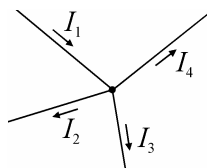
**Slika 2.1.1. Primer dva čvora.**

Rešenje.

Za čvor A: $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$. Za čvor B: $-I_5 + I_6 - I_7 + I_8 = 0$.

Zadatak 2.2

Odrediti jačinu struje I_4 na slici 2.2.1, ako je $I_1 = 3\text{ A}$, $I_2 = 2\text{ A}$ i $I_3 = 4\text{ A}$.

**Slika 2.2.1. Čvor u kojem se spajaju četiri grane.**

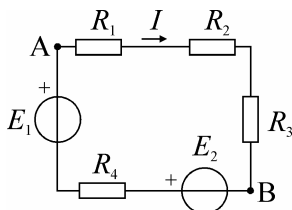
Rešenje.

Iz prvog Kirhofovog zakona $-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$, dobija se nepoznata jačina struje $I_4 = I_1 - I_2 - I_3 = -3\text{ A}$. Negativan znak u rezultatu pokazuje da je stvarni smer struje I_4 suprotan od referentnog smera koji je označen na slici 2.2.1.

Zadatak 2.3

Za prosto električno kolo prikazano na slici 2.3.1

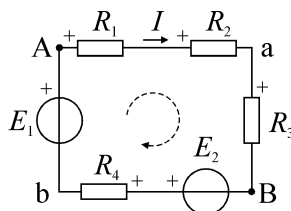
- napisati Drugi Kirhofov zakon,
- odrediti jačinu struje u odnosu na referentni smer označen na slici 2.3.1,
- odrediti napon između tačaka A i B.

**Slika 2.3.1. Prosto kolo.**

Brojni podaci su: $E_1 = 12\text{ V}$, $E_2 = 4,5\text{ V}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 2\Omega$ i $R_4 = 1,5\Omega$.

Rešenje.

Krajevi višeg potencijala na svim otpornicima označeni su na slici 2.3.2. Odabrani smer obilaska konture (jedan od dva moguća) označen je strelicom na isprekidanoj liniji.



Slika 2.3.2. Usvojen smer obilaska kontura

a) Drugi Kirhofov zakon za konturu, čiji je pretpostavljeni smer obilaska označen na slici 2.3.2, glasi

$$-E_1 + IR_1 + IR_2 + IR_4 - E_2 + IR_3 = 0.$$

b) Iz prethodne jednačine dobija se jačina struje u kolu

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 1\text{ A}.$$

c) Napon između tačaka A i B određuje se sabiranjem napona na elementima koji se nalaze između tih tačaka idući od tačke A ka tački B. Napon ne zavisi od izbora putanje, pa je izbor putanje proizvoljan. Jedna moguća putanja je AaB,

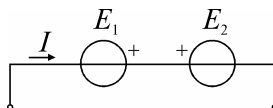
$$U_{AB} = IR_1 + IR_2 + IR_3 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 2 = 15\text{ V}.$$

Druga putanja koja postoji u kolu je putanja AbB,

$$U_{AB} = E_1 - IR_4 + E_2 = 12 - 1 \cdot 1,5 + 4,5 = 15\text{ V}.$$

Zadatak 2.4

Odrediti snage idealnih naponskih generatora prikazanih na slici 2.4.1, ako je $E_1 = 12\text{ V}$, $E_2 = 10\text{ V}$ i $I = 0,5\text{ A}$. Koliko iznosi ukupna snaga ovih generatora?



Slika 2.4.1. Uz određivanje snaga idealnih naponskih generatora.

Rešenje.

Snaga idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E_1 određuje se iz izraza $P_{E1} = E_1 I$, jer je smer struje takav da struja “izlazi” iz pozitivne elektrode ovog generatora,

$$P_{E1} = E_1 I = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ W}.$$

Snaga naponskog generatora elektromotorne sile E_2 određuje se iz izraza $P_{E2} = -E_2 I$, jer je smer struje takav da struja “ulazi” u pozitivnu elektrodu generatora,

$$P_{E2} = -E_2 I = -10 \cdot 0,5 = -5 \text{ W}.$$

Snage generatora mogu biti i pozitivne i negativne. Pozitivna snaga generatora pokazuje da generator predaje energiju kolu. Negativna snaga generatora pokazuje da generator prima energiju iz kola i da se ponaša kao prijemnik (potrošač) električne energije.

Ukupna snaga generatora dobija se kao zbir snaga svih generatora i iznosi

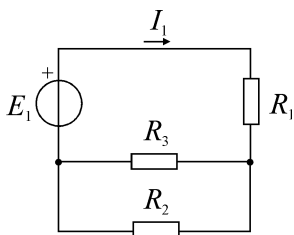
$$P_{\text{gen}} = P_{E1} + P_{E2} = 6 + (-5) = 1 \text{ W}.$$

Zadatak 2.5

U električnom kolu prikazanom na slici 2.5.1 odrediti

- ekvivalentnu otpornost koju “vidi” generator,
- jačinu struje I_1 u odnosu referentni smer označen na slici,
- snagu naponskog generatora.

Brojni podaci su: $E_1 = 20 \text{ V}$, $R_1 = 16 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$ i $R_3 = 60 \Omega$.



Slika 2.5.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

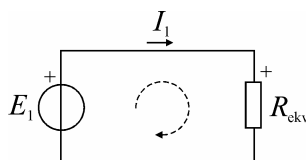
a) Paralelna veza otpornika R_2 i R_3 može da se zameni ekvivalentnim otpornikom R_{23} čija je otpornost

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 24 \Omega.$$

Ovaj otpornik je redno vezan sa otpornikom R_1 i ekvivalentna otpornost koju “vidi” generator jednaka je

$$R_{\text{ekv}} = R_1 + R_{23} = 16 + 24 = 40 \Omega.$$

b) Kada se mešovita veza otpornika zameni ekvivalentnim otpornikom dobija se ekvivalentno kolo prikazano na slici 2.5.2.



Slika 2.5.2. Ekvivalentno kolo.

Jednačina koja iskazuje Drugi Kirhofov zakon, za izabranu orijentaciju konture, glasi

$$-E_1 + I_1 R_{\text{ekv}} = 0.$$

Iz prethodne jednačine dobija se tražena jačina struje

$$I_1 = \frac{E_1}{R_{\text{ekv}}} = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ A}.$$

c) Snaga naponskog generatora je

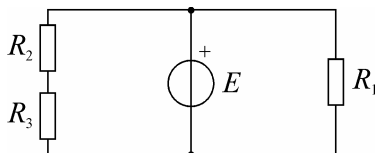
$$P_{E1} = E_1 I_1 = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ W}.$$

Zadatak 2.6

U električnom kolu prikazanom na slici 2.6.1 odrediti

- struje u svim granama kola,
- snagu generatora,
- snagu Džulovih gubitaka na otporniku R_3 .

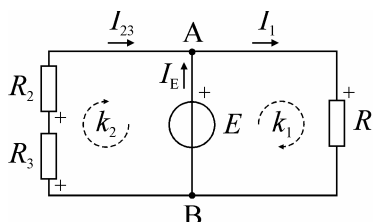
Brojni podaci su: $E = 9 \text{ V}$, $R_1 = 45 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$ i $R_3 = 50 \Omega$.



Slika 2.6.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Pri rešavanju električnog kola potrebno je pretpostaviti referentne smerove struja u svim granama kola i obeležiti krajeve višeg potencijala na svim otpornicima, kao na slici 2.6.2.



Slika 2.6.2. Usvojeni smerovi struja i orijentacija kontura.

a) Za dato kolo na osnovu Prvog Kirhofovoga zakona može da se napiše jedna nezavisna jednačina (kolo ima dva čvora). Za čvor A ona glasi

$$I_E - I_1 + I_{23} = 0.$$

Za dato kolo na osnovu Drugog Kirhofovog zakona mogu da se napišu dve nezavisne jednačine. Izabrane konture su dva okca, a usvojena orijentacija kontura označena je strelicom na isprekidanoj liniji na slici 2.6.2. Iz Drugog Kirhofovog zakona primenjenog na izabrane konture, dobijaju se jednačine

$$-E + R_1 I_1 = 0,$$

$$-E - R_2 I_{23} - R_3 I_{23} = 0.$$

Rešavanjem jednačina dobijaju se jačine struja u svim granama kola. Iz druge i treće jednačine dobijaju se struje

$$I_1 = \frac{E}{R_1} = 200 \text{ mA}, \quad I_{23} = \frac{-E}{R_2 + R_3} = -60 \text{ mA},$$

a onda iz prve jednačine i struja kroz generator,

$$I_E = I_1 - I_{23} = 260 \text{ mA}.$$

b) Snaga naponskog generatora iznosi

$$P_E = EI_1 = 2,34 \text{ W}.$$

c) Snaga Džulovih gubitaka na otporniku R_3 jednaka je

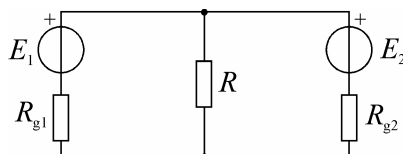
$$P_{R3} = R_3 I_{23}^2 = 0,18 \text{ W}.$$

Zadatak 2.7

U kolu prikazanom na slici 2.7.1 odrediti

- struje u svim granama kola,
- ukupnu snagu oba generatora,
- snagu Džulovih gubitaka na otporniku R .

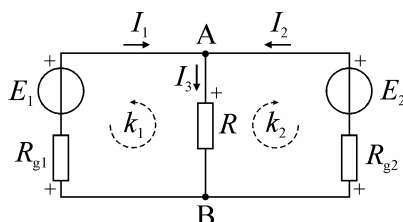
Brojni podaci su: $E_1 = 10\text{ V}$, $R_{g1} = 10\Omega$, $E_2 = 20\text{ V}$, $R_{g2} = 5\Omega$ i $R = 20\Omega$.



Slika 2.7.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Usvojeni referentni smerovi struja označeni su na slici 2.7.2.



Slika 2.7.2. Usvojeni smerovi struja i orijentacija kontura.

a) Za dato kolo na osnovu Prvog Kirhofovog zakona može da se napiše jedna nezavisna jednačina (kolo ima dva čvora). Za čvor A ona glasi

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Za dato kolo na osnovu Drugog Kirhofovog zakona mogu da se napišu dve nezavisne jednačine. Za konture k_1 i k_2 , označene na slici 2.7.2, one glase

$$E_1 - R_{g1}I_1 - RI_3 = 0,$$

$$E_2 - R_{g2}I_2 - RI_3 = 0.$$

Rešenje dobijenog sistema jednačina (tri jednačine sa tri nepoznate) su jačine struja u svim granama kola. Iz prve jednačine je $I_3 = I_1 + I_2$. Uvrštavanjem u druge dve jednačine, nakon sređivanja one postaju

$$(R + R_{g1})I_1 + RI_2 = E_1,$$

$$RI_1 + (R + R_{g2})I_2 = E_2.$$

Kada se u ove dve jednačine uvrste brojni podaci one glase

$$30I_1 + 20I_2 = 10,$$

$$20I_1 + 25I_2 = 20.$$

Prva jednačina može da se podeli sa 10, a druga sa 5,

$$3I_1 + 2I_2 = 1,$$

$$4I_1 + 5I_2 = 4.$$

Iz poslednje dve jednačine određuju se struje I_1 i I_2 ,

$$I_1 = -0,43 \text{ A}, \quad I_2 = 1,14 \text{ A},$$

a onda iz njih i I_3 ,

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,71 \text{ A}.$$

b) Snage naponskih generatora su

$$P_{E1} = E_1 I_1 = 10 \cdot (-0,43) = -4,3 \text{ W},$$

$$P_{E2} = E_2 I_2 = 20 \cdot 1,14 = 22,8 \text{ W}.$$

Ukupna snaga generatora jednaka je zbiru snaga svih generatora,

$$P_{\text{gen}} = P_{E1} + P_{E2} = -4,3 + 22,8 = 18,5 \text{ W}.$$

c) Snaga Džulovih gubitaka na otporniku R jednaka je

$$P_R = RI_3^2 = 10,08 \text{ W}.$$

Zadatak 2.8

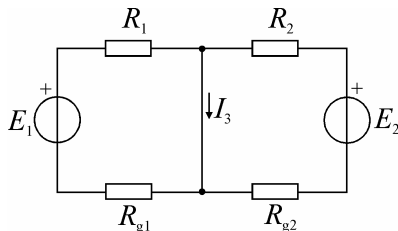
U električnom kolu, prikazanom na slici 2.8.1 odrediti

a) struju I_3 u naznačenom referentnom smeru,

b) napone na otpornicima R_2 i R_{g2} ,

c) snagu Džulovih gubitaka na otporniku R_2 .

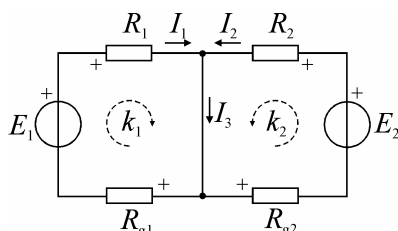
Brojni podaci su: $E_1 = 10 \text{ V}$, $R_{g1} = 2 \Omega$, $E_2 = 12 \text{ V}$, $R_{g2} = 2 \Omega$, $R_1 = 75 \Omega$ i $R_2 = 30 \Omega$.



Slika 2.8.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Usvojeni referentni smerovi struja I_1 i I_2 , označeni su na slici 2.8.2.



Slika 2.8.2. Usvojeni smerovi struja i orijentacija kontura.

a) Jednačina na osnovu Prvog Kirhofovog zakona napisana za gornji čvor glasi

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

U datom kolu postoje dve nezavisne konture. Smerovi obilaska izabranih kontura označeni su na slici 2.8.2. Na osnovu Drugog Kirhofovog zakona za konture k_1 i k_2 dobijaju se jednačine

$$-E_1 + I_1 R_1 + I_1 R_{g1} = 0,$$

$$-E_2 + I_2 R_2 + I_2 R_{g2} = 0.$$

Rešenje dobijenog sistema jednačina (tri jednačine sa tri nepoznate) su jačine struja u svim granama kola. Rešavanjem druge, odnosno treće jednačine dobijaju se jačine struja I_1 i I_2 ,

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_{g1}} = 130 \text{ mA}, \quad I_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_{g2}} = 375 \text{ mA}.$$

Jačina struje I_3 određuje se iz prve jednačine i iznosi

$$I_3 = I_1 + I_2 = 505 \text{ mA}.$$

b) Naponi na otpornicima R_2 i R_{g2} (za usaglašene referentne smerove označene na slici 2.8.2) su

$$U_{R2} = R_2 I_2 = 30 \cdot 0,375 = 11,25 \text{ V},$$

$$U_{Rg2} = R_{g2} I_2 = 2 \cdot 0,375 = 0,75 \text{ V}.$$

c) Snaga Džulovih gubitaka na otporniku R_2 iznosi

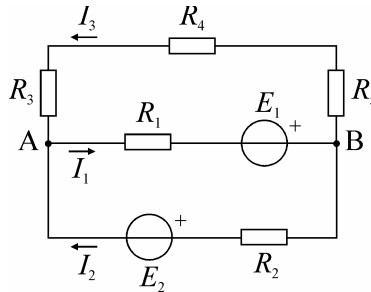
$$P_{R2} = R_2 I_2^2 = 4,22 \text{ W}.$$

Zadatak 2.9

U električnom kolu prikazanom na slici 2.9.1 odrediti

- struje u svim granama kola u odnosu na zadati referentni smer,
- napon između tačaka A i B,
- snage naponskih generatora.

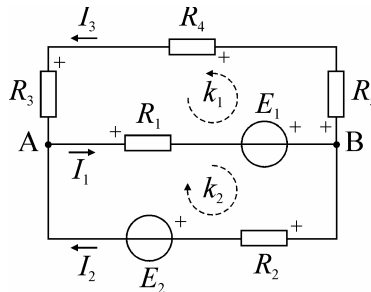
Brojni podaci su: $E_1 = 9\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$, $R_1 = 45\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 40\Omega$, $R_4 = 60\Omega$ i $R_5 = 80\Omega$.



Slika 2.9.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Usvojene orijentacije kontura i krajevi otpornika na višem potencijalu označeni su na slici 2.9.2.



Slika 2.9.2. Usvojene orijentacije kontura.

- Iz Prvog Kirhofovog zakona primenjenog na čvor A dobija se

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Iz Drugog Kirhofovog zakona primenjenog na konture k_1 i k_2 , označene na slici 2.9.2, dobijaju se jednačine

$$-E_1 + I_3 R_5 + I_3 R_4 + I_3 R_3 + I_1 R_1 = 0,$$

$$I_1 R_1 - E_1 + I_2 R_2 + E_2 = 0.$$

Rešenje dobijenog sistema jednačina (tri jednačine sa tri nepoznate) su jačine struja u svim granama kola. Ako se iz prve jednačine izrazi jačina struje I_1 , $I_1 = I_2 + I_3$ i to uvrsti u druge dve jednačine, one postaju

$$I_3(R_5 + R_4 + R_3) + (I_2 + I_3)R_1 = E_1,$$

$$(I_2 + I_3)R_1 + I_2R_2 = E_1 - E_2.$$

Njihovo rešenje je

$$I_2 = -50 \text{ mA}, \quad I_3 = 50 \text{ mA},$$

a onda i

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0.$$

b) Napon između tačaka A i B može da se odredi duž nekoliko putanja,

$$U_{AB} = -I_3R_3 - I_3R_4 - I_3R_5 = I_1R_1 - E_1 = -E_2 - I_2R_2 = -9 \text{ V}.$$

Napon između tačaka B i A iznosi $U_{BA} = -U_{AB} = 9 \text{ V}$.

c) Snage naponskih generatora su

$$P_{E1} = E_1I_1 = 9 \cdot 0 = 0 \text{ W},$$

$$P_{E2} = -E_2I_2 = -12 \cdot (-0,05) = 0,6 \text{ W}.$$

Zadatak 2.10

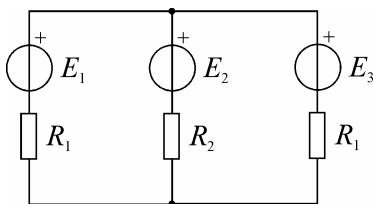
U električnom kolu prikazanom na slici 2.10.1 odrediti

a) jačine struja u svim granama kola,

b) ukupnu snagu svih generatora,

c) pokazati da je teorema održanja snage zadovoljena.

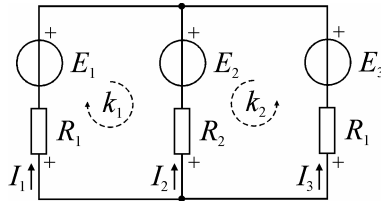
Brojni podaci su: $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = E_3 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$ i $R_2 = 5 \Omega$.



Slika 2.10.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Usvojeni referentni smerovi struja i orijentacija kontura prikazani su na slici 2.10.2.



Slika 2.10.2. Usvojeni smerovi struja i orijentacija kontura.

a) Iz Prvog Kirhofovog zakona napisanog za donji čvor dobija se

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

Jednačine napisane na osnovu Drugog Kirhofovog zakona za konture k_1 i k_2 , označene na slici 2.10.2, glase

$$-E_1 + E_2 - R_2 I_2 + R_1 I_1 = 0,$$

$$-E_3 + E_2 - R_2 I_2 + R_1 I_3 = 0.$$

Rešenje dobijenog sistema jednačina su jačine struja u svim granama kola,

$$I_1 = 0,75 \text{ A}, \quad I_2 = -0,5 \text{ A}, \quad I_3 = -0,25 \text{ A}.$$

b) Ukupna snaga svih generatora u kolu iznosi

$$P_{\text{gen}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = (15 - 5 - 2,5) \text{ W} = 7,5 \text{ W}.$$

c) Ukupna snaga Džulovih gubitaka u kolu iznosi

$$P_J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_1 I_3^2 = (5,625 + 1,25 + 0,625) \text{ W} = 7,5 \text{ W}.$$

Na osnovu teoreme održanja snage, zbir snaga generatora jednak je zbiru snaga Džulovih gubitaka svih otpornika u kolu,

$$P_{\text{gen}} = P_J = 7,5 \text{ W}.$$

Zadatak 2.11

Ponoviti prethodni zadatak za $R_2 = 0$.

Rešenje.

a) Za iste referentne smerove kao u prethodnom zadatku dobija se $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = -1 \text{ A}$ i $I_3 = 0 \text{ A}$.

b) Ukupna snaga generatora iznosi

$$P_{\text{gen}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = (20 - 10 + 0) \text{ W} = 10 \text{ W}.$$

c) Ukupna snaga Džulovih gubitaka jednaka je

$$P_J = R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 = (10 + 0) \text{ W} = 10 \text{ W}.$$

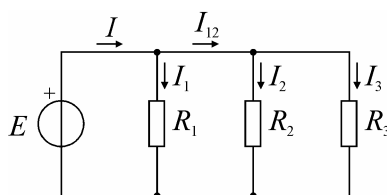
Na osnovu teoreme održanja snage, ukupna snaga generatora jednaka je ukupnoj snazi Džulovih gubitaka u kolu, $P_{\text{gen}} = P_J = 10 \text{ W}$.

Zadatak 2.12

U električnom kolu prikazanom na slici 2.12.1 odrediti

- napone na svim otpornicima,
- struje I_1 , I_2 , I_3 , i I_{12} u naznačenom referentnom smeru,
- snagu generatora.

Brojni podaci su: $E_1 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, i $R_2 = 20 \Omega$ i $R_3 = 30 \Omega$.



Slika 2.12.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

- Naponi na svim otpornicima su isti i jednaki naponu generatora,

$$E = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = 12 \text{ V}.$$

- S obzirom da su naponi na otpornicima poznati, struje kroz otpornike mogu da se odrede iz Omovog zakona,

$$I_1 = \frac{E}{R_1} = 1,2 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2} = 0,6 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{E}{R_3} = 0,4 \text{ A}.$$

Struja I_{12} određuje se iz Prvog Kirhofovog zakona,

$$I_{12} = I_2 + I_3 = 1 \text{ A}.$$

- Struja generatora takođe može da se odredi iz Prvog Kirhofovog zakona,

$$I = I_1 + I_{12} = 2,2 \text{ A}.$$

Snaga generatora jednaka je

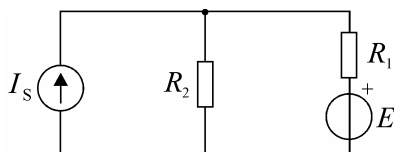
$$P_E = EI = 12 \cdot 2,2 = 26,4 \text{ W}.$$

Zadatak 2.13

U električnom kolu prikazanom na slici 2.13.1 odrediti

- struje u svim granama kola,
- napon strujnog generatora,
- snagu strujnog generatora.

Brojni podaci su: $E = 30 \text{ V}$, $I_s = 0,5 \text{ A}$, $R_1 = 20 \Omega$ i $R_2 = 20 \Omega$.

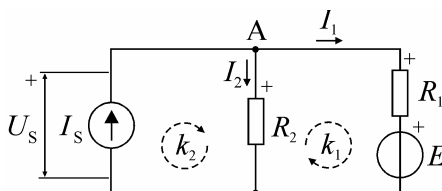


Slika 2.13.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

Izabrani referentni smerovi struja u granama kola, kao i izabrane konture sa označenim smerovima obilaska prikazani su na slici 2.13.2. Na slici je označen i napon U_s na strujnom generatoru.

Kada u kolu postoji strujni generator, struja u grani sa strujnim generatorom je poznata, a nepoznata veličina je napon strujnog generatora.



Slika 2.13.2. Usvojeni smerovi struja i orijentacija kontura.

- Iz Prvog Kirhofovog zakona napisanog za čvor A (slika 2.13.2),

$$I_1 + I_2 - I_s = 0,$$

- I Drugog Kirhofovog zakona napisanog za konturu k_1 ,

$$I_1 R_1 + E - I_2 R_2 = 0.$$

dobijaju se nepoznate jačine struja,

$$I_1 = -0,5 \text{ A}, \quad I_2 = 1 \text{ A}.$$

- Iz drugog Kirhofovog zakona napisanog za konturu k_2 (slika 2.13.2),

$$-U_s + I_2 R_2 = 0,$$

dobija se napon strujnog generatora

$$U_S = I_2 R_2 = 20 \text{ V}.$$

c) Snaga strujnog generatora iznosi

$$P_S = I_S U_S = 10 \text{ W}.$$

Zadatak 2.14

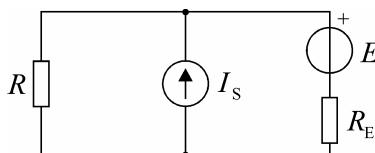
U električnom kolu prikazanom na slici 2.14.1 odrediti

a) struje u svima granama i napon strujnog generatora,

b) snage svih generatora i

c) pokazati da je teorema održanja snage zadovoljena.

Brojni podaci su: $I_S = 2 \text{ A}$, $E = 20 \text{ V}$, $R_E = 2 \Omega$ i $R = 4 \Omega$.

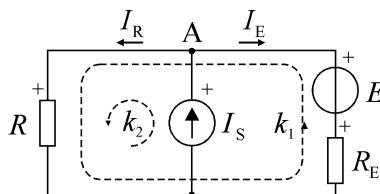


Slika 2.14.1. Analizirano kolo.

Rešenje.

U zadatku je dato rešenje za izbor kontura prikazan na slici 2.14.2. Osim ovog izbora kontura, analiziran je i izbor kontura prikazan na slici 2.14.3, i diskutovan način rešavanja sistema jednačina koje se dobijaju u tom slučaju.

Izabrani referentni smerovi struja u granama kola, kao i izabrane konture sa označenim smerovima obilaska prikazani su na slici 2.14.2.



Slika 2.14.2. Usvojeni smerovi struja i orijentacija kontura.

a) Nezavisne jednačine koje mogu da se napišu na osnovu Prvog i Drugog Kirhofovog zakona za kolo prikazano na slici 2.14.2 su

$$I_R + I_E - I_S = 0,$$

$$I_R R - I_E R_E - E = 0,$$

$$I_R R - U_S = 0.$$

Jačine struja u kolu određuju se iz prve dve jednačine i iznose

$$I_E = -2 \text{ A}, \quad I_R = 4 \text{ A}.$$

Napon na strujnom generatoru dobija se iz treće jednačine i iznosi

$$U_S = I_R R = 16 \text{ V}.$$

b) Snage generatora su

$$P_S = I_S U_S = 32 \text{ W}, \quad P_E = -I_E E = 40 \text{ W}.$$

c) Zbir snaga svih generatora jednak je

$$P_{\text{gen}} = P_S + P_E = 72 \text{ W}.$$

Snage otpornika su

$$P_R = R I_R^2 = 64 \text{ W}, \quad P_{RE} = R_E I_E^2 = 8 \text{ W}.$$

Zbir snaga Džulovih gubitaka svih otpornika iznosi

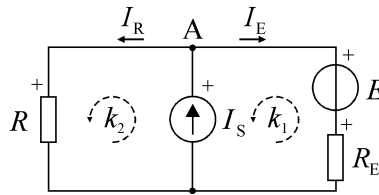
$$P_J = P_R + P_{RE} = 72 \text{ W}.$$

Ukupna snaga generatora i ukupna snazi Džulovih gubitaka su jednake,

$$P_{\text{gen}} = P_J = 72 \text{ W},$$

čime je pokazano da je teorema održanja snage zadovoljena.

Druga mogućnost za izbor kontura u kolu prikazana je na slici 2.14.3.



Slika 2.14.3. Druga mogućnost za izbor kontura.

U ovom slučaju, nezavisne jednačine dobijene iz Prvog i Drugog Kirhofovog zakona glase

$$I_R + I_E - I_S = 0,$$

$$I_R R - U_S = 0,$$

$$-I_E R_E - E + U_S = 0.$$

Sabiranjem poslednje dve jednačine, iz njih se eliminiše napon strujnog generatora,

$$I_R R - I_E R_E - E = 0.$$

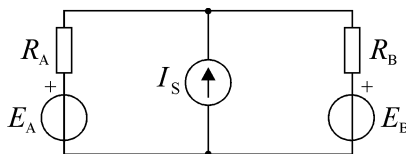
Prethodna jednačina je ista kao jednačina napisana na osnovu Drugog Kirhofovog zakona za konturu k_1 na slici 2.14.2 (za prvi izbor kontura). Na ovaj način dobijene jednačine, $I_R + I_E - I_S = 0$ i $I_R R - I_E R_E - E = 0$, čine sistem sa dve nepoznate, iz kojih mogu da se odrede nepoznate struje I_R i I_E .

Zadatak 2.15

U električnom kolu prikazanom na slici 2.15.1 odrediti

- struje u svima granama i napon strujnog generatora,
- snage svih generatora i
- pokazati da je teorema održanja snage zadovoljena.

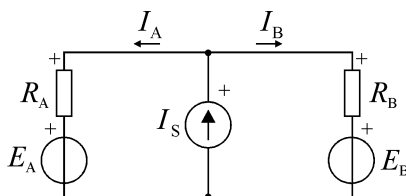
Brojni podaci su: $E_A = 30\text{ V}$, $R_A = 30\Omega$, $E_B = 70\text{ V}$, $R_B = 70\Omega$ i $I_S = 0,5\text{ A}$.



Slika 2.15.1. Kolo koje se analizira.

Rešenje.

Izabrani referentni smerovi struja u granama kola prikazani su na slici 2.15.2.



Slika 2.15.2. Usvojeni smerovi struja.

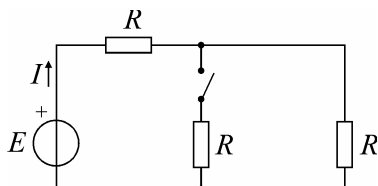
a) Struje u granama kola u odnosu na označene referentne smerove su $I_A = 0,75\text{ A}$ i $I_B = -0,25\text{ A}$. Napon strujnog generatora jednak je $U_S = 52,5\text{ V}$.

b) Snage naponskih generatora su $P_{EA} = -22,5\text{ W}$ i $P_{EB} = 17,5\text{ W}$. Snaga strujnog generatora jednaka je $P_S = 26,25\text{ W}$.

c) Ukupna snaga generatora jednaka je $P_{\text{gen}} = P_{EA} + P_{EB} + P_S = 21,25\text{ W}$. Snage Džulovih gubitaka na otpornicima su $P_{RA} = 16,875\text{ W}$ i $P_{RB} = 4,375\text{ W}$. Ukupna snaga Džulovih gubitaka jednaka je $P_J = 21,25\text{ W}$. Zbir snaga generatora jednak je zbiru snaga Džulovih gubitaka, čime je pokazano da je teorema održanja snage zadovoljena.

Zadatak 2.16

U električnom kolu prikazanom na slici 2.16.1 odrediti struju kroz generator pre i posle zatvaranja prekidača. Elektromotorna sila generatora jednaka je 9 V. Otpornost svih otpornika su iste i jednake 10Ω .

**Slika 2.16.1. Analizirano kolo.**

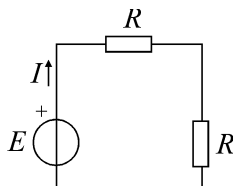
Rešenje.

U zadatku je potrebno analizirati dva slučaja: i) kada je prekidač otvoren i ii) kada je prekidač zatvoren.

i) Kao prvi slučaj posmatra se kolo kada je prekidač otvoren. Ekvivalentno kolo prikazano je na slici 2.16.2. U ovom slučaju na bateriju je priključena redna veza dva otpornika.

Struja generatora u slučaju kada je prekidač otvoren jednaka je

$$I = \frac{E}{R + R} = \frac{9}{20} = 0,45 \text{ A.}$$

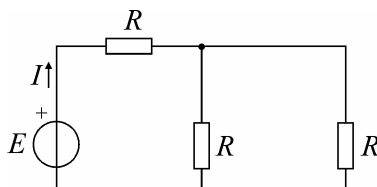
**Slika 2.16.2. Analizirano kolo sa otvorenim prekidačem.**

ii) Kao drugi slučaj analizira se kolo sa slike 2.16.1 kada je prekidač zatvoren. Odgovarajuće ekvivalentno kolo prikazano je na slici 2.16.3. Ekvivalentna otpornost koju vidi generator jednaka je

$$R_{\text{ekv}} = R + \frac{R \cdot R}{R + R} = 10 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 15 \Omega.$$

Struja kroz generator u slučaju kada je prekidač otvoren jednaka je

$$I = \frac{E}{R_{\text{ekv}}} = \frac{9}{15} = 0,6 \text{ A.}$$



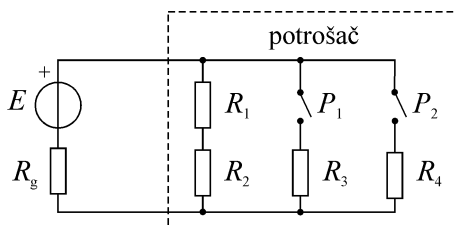
Slika 2.16.3. Analizirano kolo sa zatvorenim prekidačem.

Zadatak 2.17

U električnom kolu prikazanom na slici 2.17.1

- izračunati snagu potrošača za sve kombinacije položaja prekidača P_1 i P_2 .
- Na osnovu rezultata dobijenog pod a), odrediti kombinaciju prekidača koja obezbeđuje da je potrošač prilagođen po snazi na generator.

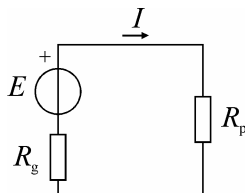
Elementi kola su: generator elektromotorne sile $E = 230\text{ V}$ i unutrašnje otpornosti $R_g = 40\Omega$. Ostali brojni podaci su: $R_1 = 70\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 120\Omega$ i $R_4 = 60\Omega$.



Slika 2.17.1. Analizirano kolo sa složenim potrošačem.

Rešenje.

- Potrošač može da se zameni ekvivalentnim otpornikom otpornosti R_p , a kolo ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 2.17.2.



Slika 2.17.2. Ekvivalentnim kolo.

Jačina struje u ekvivalentnom kolu je

$$I = \frac{E}{R_g + R_p}.$$

Snaga potrošača određuje se iz izraza

$$P_p = R_p I^2 = R_p \frac{E^2}{(R_g + R_p)^2}.$$

Sa promenom položaja prekidača promeniće se otpornost potrošača. Postoje četiri kombinacije položaja dva prekidača: oba otvorena, zatvoren samo prvi, zatvoren samo drugi i oba zatvorena.

Prekidači P_1 i P_2 otvoreni

$$R_p = R_1 + R_2 = 120\Omega, \quad P_p = 247,97 \text{ W}.$$

Prekidač P_1 zatvoren i prekidač P_2 otvoren

$$R_p = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 60\Omega, \quad P_p = 317,4 \text{ W}.$$

Prekidač P_1 otvoren i prekidač P_2 zatvoren

$$R_p = \frac{(R_1 + R_2)R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = 40\Omega, \quad P_p = 330,63 \text{ W}.$$

Prekidači P_1 i P_2 zatvoreni

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 30\Omega, \quad P_p = 323,88 \text{ W}.$$

b) Potrošač je prilagođen po snazi na generator ako se na potrošaču razvija maksimalna snaga. Snaga na potrošaču je maksimalna onda kada je otpornost potrošača jednaka unutrašnjoj otpornosti generatora. To odgovara slučaju kada je prekidač P_1 otvoren i prekidač P_2 zatvoren, jer je tada $R_p = R_g = 40\Omega$.