

3. Prostoperiodične struje

Prostoperiodične struje su česte u praksi i koriste se mnogo više od vremenski konstantnih struja. U elektroenergetskim sistemima, prenos električne energije od mesta gde se proizvodi do potrošača vrši se prostoperiodičnom strujom. Struja koja je u svakodnevnoj upotrebi je takođe prostoperiodična.

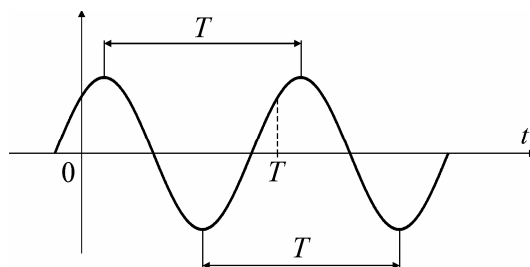
U okviru ovog poglavlja bavićemo se prostoperiodičnim veličinama i kolima sa prostoperiodičnim strujama i naponima.

3.1. Prostoperiodične veličine

Prostoperiodične funkcije su sinusoidalne funkcije vremena (slika 3.1). Prostoperiodične funkcije su sinusna ($\sin x$) i kosinusna funkcija ($\cos x$). Sinusna funkcija može se predstaviti preko kosinusne funkcije na sledeći način

$$\sin x = \cos(x - \pi/2), \quad -\sin x = \cos(x + \pi/2). \quad (3.1)$$

Prostoperiodične funkcije su periodične funkcije vremena, što znači da im se trenutne vrednosti posle nekog vremena ponavljaju. Za svaku periodičnu funkciju $f(t)$ postoji pozitivna veličina T takva da za svako t važi $f(t+T) = f(t)$. Najmanja vrednost T , koja ispunjava prethodnu relaciju, naziva se osnovnom periodom funkcije $f(t)$. Periodu je najlakše odrediti kao vremenski interval između dva uzastopna maksimuma ili dva uzastopna minimuma (slika 3.1).



Slika 3.1. Primer prostoperiodične funkcije vremena.

Prostoperiodičan napon se predstavlja u sledećem standardnom obliku

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta), \quad (3.2)$$

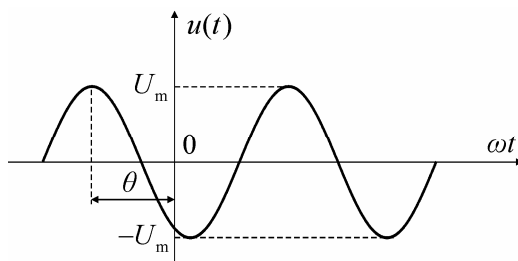
gde je t vreme, a U_m , ω i θ su konstantne veličine.

U izrazu (3.2) $u(t)$ je trenutna vrednost napona. Konstanta U_m je nenegativna veličina i naziva se amplituda. Amplituda ima istu jedinicu kao i trenutna vrednost. Maksimalna vrednost napona jednaka je U_m , a minimalna $-U_m$.

Konstanta ω ($\omega > 0$) naziva se kružna učestanost. Jedinica za kružnu učestanost je radijan u sekundi (rad/s).

Argument kosinusa, $(\omega t + \theta)$, naziva se faza. Za $t = 0$ faza je jednaka θ . Zato se θ naziva početna faza. S obzirom da je ωt izraženo u radijanima, sledi da i θ takođe treba da bude izraženo u radijanima.

Informacije relevantne za prostoperiodične veličine su trenutna vrednost, amplituda, kružna frekvencija i početna faza (slika 3.2). Sve relevantne informacije o prostoperiodičnom naponu su sadržane u izrazu (3.2).



Slika 3.2. Primer prostoperiodičnog napona.

U SI sistemu jedinica, uglovi se mere u radijanima, a ne u stepenima. Ugao od jednog radijana je ugao sa temenom u centru kruga, čija je dužina luka jednaka poluprečniku kruga. S obzirom da je obim kružnice poluprečnika r jednak $2\pi r$, sledi da je u obimu sadržano 2π poluprečnika. Prema tome, ugao od 2π radijana odgovara punom uglu, odnosno $2\pi = 360^\circ$. Relacije koje povezuje frekvenciju i kružnu frekvenciju su

$$\omega = 2\pi f \quad [\text{rad/s}], \quad (3.3)$$

i

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [\text{Hz}]. \quad (3.4)$$

Jedinica za frekvenciju je herc (Hz). Osnovna perioda prostoperiodične veličine jednaka je

$$T = \frac{1}{f} \quad [\text{s}]. \quad (3.5)$$

Svi uvedeni termini i definicije su u potpunosti primenljivi na bilo koju drugu prostoperiodičnu veličinu: jačinu struje, elektromotornu silu, naelektrisanje, itd.

Prostoperiodična jačina struje se predstavlja u sledećem standardnom obliku

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi), \quad (3.6)$$

gde je I_m amplituda, ω kružna učestanost i ψ početna faza.

Za početne faze napona i struje koriste se različite oznake: θ , odnosno ψ .

Primer 3.1

Frekvencija napona električne mreže je 50 Hz. Odrediti kružnu frekvenciju i periodu napona.

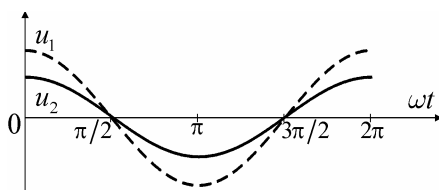
Rešenje.

Kružna frekvencija je $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$.

Perioda napona je $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$.

3.2. Fazna razlika

Posmatrajmo dva prostoperiodična napona, iste frekvencije, kao na slici 3.3. Oba napona prolaze kroz nulu na horizontalnoj osi u istom trenutku. Oni takođe dostižu svoje najveće i najmanje vrednosti u istom trenutku. Prema tome, ova dva napona su u potpunosti sinhronizovana.



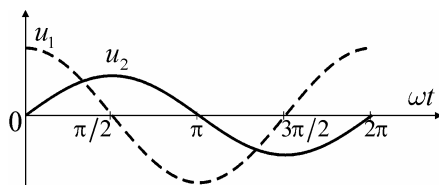
Slika 3.3. Dva sinhronizovana prostoperiodična napona.

Na slici 3.4 prikazana su ista dva napona, ali u ovom slučaju u_2 dostiže maksimalnu vrednost $\pi/2$ radijana (90°) posle u_1 . Kaže se da u_2 kasni u odnosu na u_1 za $\pi/2$ radijana ili 90° . Napon u_1 dostiže maksimalnu vrednost na početku ciklusa. Zbog toga je početna faza ovog napona jednaka nuli. Vremenski oblici za ova dva napona glase

$$u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t),$$

$$u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t - \pi/2).$$

Početna faza napona u_2 jednaka je $-\pi/2$. Znak minus u zagradi prethodnog izraza, pokazuje da napon u_2 kasni za naponom u_1 za ugao od $\pi/2$ radijana.



Slika 3.4. Napon u_2 kasni u odnosu na u_1 za $\pi/2$.

Prostoperiodične veličine iste učestanosti mogu da se porede po fazi. Posmatrajmo dva prostoperiodična napona iste učestanosti, $u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \theta_1)$ i $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \theta_2)$. Za poređenje po fazi dve prostoperiodične veličine uvodi se pojam fazne razlike

$$\theta_{12} = (\omega t + \theta_1) - (\omega t + \theta_2) = \theta_1 - \theta_2.$$

Fazna razlika očigledno ne zavisi od vremena. Fazna razlika dve prostoperiodične veličine jednaka je razlici njihovih početnih faza. Ako je $\theta_{12} > 0$ kaže se da napon $u_1(t)$ prednjači naponu $u_2(t)$ za θ_{12} . To je potpuno isto kao i da se kaže da napon $u_2(t)$ kasni za naponom $u_1(t)$. Ako je $\theta_{12} < 0$ tada napon $u_2(t)$ prednjači naponu $u_1(t)$, odnosno napon $u_1(t)$ kasni za naponom $u_2(t)$.

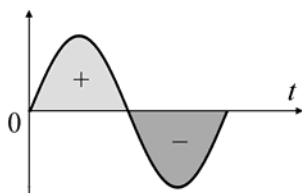
Kada su prostoperiodične veličine potpuno sinhronizovane, kao one prikazane na slici 3.3, njihova fazna razlika jednaka je nuli i za njih se kaže da su u fazi.

Dve prostoperiodične veličine različite prirode i iste učestanosti, takođe mogu da se porede po fazi. Posmatrajmo prostoperiodičan napon $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$ i prostoperiodičnu struju $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$. Fazna razlika između napona i struje označava se sa φ , i jednaka je razlici njihovih početnih faza,

$$\varphi = \theta - \psi. \quad (3.7)$$

3.3. Srednja i efektivna vrednost

Srednja vrednost prostoperiodične veličine jednaka je nuli. Ova činjenica može da se ilustruje grafički. Na slici 3.5 je prikazan primer prostoperiodične veličine i označene su pozitivna i negativna poluperioda. Očigledno je da prostoperiodična veličina u pozitivnoj i negativnoj poluperiodi uzima iste vrednosti ali sa suprotnim znakom. Kako je pozitivna poluperioda jednaka negativnoj, srednja vrednost prostoperiodične veličine jednaka je nuli.



Slika 3.5. Srednja vrednost prostoperiodične veličine jednaka je nuli.

Za periodične veličine uvodi se pojam efektivne vrednosti. Efektivna vrednost periodične struje jednaka je vrednosti vremenski konstantne struje koja bi na istom otporniku disipirala istu snagu. Efektivna vrednost periodične struje omogućava poređenje između periodične i vremenski konstantne struje.

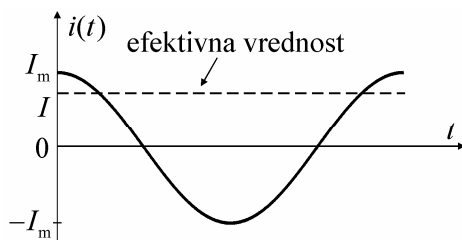
Za prostoperiodičnu struju veza između efektivne vrednosti i amplitude je

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m, \quad (3.8)$$

gde je I efektivna vrednost, a I_m amplituda (slika 3.6). Periodični signali drugačijeg oblika imaju drugačiji odnos između efektivne i maksimalne vrednosti. Iz izraza (3.8), amplituda prostoperiodične struje je $\sqrt{2}$ puta veća od efektivne vrednosti,

$$I_m = \sqrt{2} I \approx 1,41 I. \quad (3.9)$$

Ove relacije između amplitude i efektivne vrednosti važe i za bilo koju drugu prostoperiodičnu veličinu (napon, elektromotornu silu, naelektrisanje, fluks itd.).



Slika 3.6. Prostoperiodična struja i njena efektivna vrednost.

Kada se meri prostoperiodična struja ili napon, instrumenti (ampermetar ili voltmetar) pokazuju njihovu efektivnu vrednost.

Kada se govori o prostoperiodičnoj veličini uvek se koristi njena efektivna vrednost. Na primer, kada se kaže da je napon u električnoj mreži 230 V, 230 V je efektivna vrednost tog napona. Njegova maksimalna vrednost je $\sqrt{2}$ puta veća i iznosi oko 325 V.

Zbog ovako velike važnosti efektivnih vrednosti, vremenski oblik prostoperiodičnih veličina se umesto u obliku (3.2), odnosno (3.6), piše na sledeći način

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \theta), \quad (3.10)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi). \quad (3.11)$$

Koriste se sledeće konvencije

- i , u i e označavaju trenutne vrednosti,
- I_m , U_m i E_m označavaju maksimalne vrednosti, odnosno amplitude,
- I , U i E označavaju efektivne vrednosti.

Primer 3.2

Prostoperiodičan napon je dat izrazom $u = 35 \cos(314,2t) \text{ V}$. Odrediti a) maksimalnu vrednost, b) efektivnu vrednost, c) početnu fazu, d) kružnu frekvenciju, e) frekvenciju i f) osnovnu periodu.

Rešenje.

Poređenjem $u = U_m \cos(\omega t + \theta)$ sa $u = 35 \cos(314,2t) \text{ V}$ dobija se

- a) maksimalna vrednost napona jednaka je amplitudi i iznosi $U_m = 35 \text{ V}$,
- b) efektivna vrednost je $U = U_m / \sqrt{2} = 0,707 \cdot U_m = 0,707 \cdot 35 \text{ V} = 24,75 \text{ V}$,
- c) početna faza je $\theta = 0$,
- d) kružna frekvencija je $\omega = 314,2 \text{ rad/s}$,
- e) frekvencija je $f = \omega / (2\pi) = 314,2 / (2\pi) = 50 \text{ Hz}$,
- f) osnovna perioda je $T = 1/f = 1/50 = 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$.

Primer 3.3

Prostoperiodična struja data je izrazom $i = 75 \cos(200\pi t - \pi/4) \text{ mA}$. Odrediti a) maksimalnu vrednost, b) efektivnu vrednost, c) početnu fazu, d) kružnu frekvenciju, e) frekvenciju i f) osnovnu periodu.

Rešenje.

Poređenjem $i = I_m \cos(\omega t + \psi)$ sa $i = 75 \cos(200\pi t - \pi/4) \text{ mA}$ dobija se

- a) maksimalna vrednost jednaka je amplitudi i iznosi $I_m = 75 \text{ mA}$,
- b) efektivna vrednost je $I = I_m / \sqrt{2} = 75 \text{ mA} / \sqrt{2} = 0,707 \cdot 75 \text{ mA} = 53 \text{ mA}$,
- c) početna faza je $\psi = -\pi/4$,
- d) kružna frekvencija je $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$,
- e) frekvencija je $f = \omega / (2\pi) = 200\pi / (2\pi) = 100 \text{ Hz}$,
- f) osnovna perioda je $T = 1/f = 1/100 = 0,01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$.

3.4. Elementi kola u prostoperiodičnom režimu

3.4.1. Idealan naponski generator

Prema definiciji idealnog naponskog generatora, za referentne smerove elektromotorne sile i napona prikazane na slici 3.7, važi

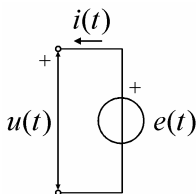
$$u(t) = e(t).$$

Napon idealnog naponskog generatora jednak je elektromotornoj sili, bez obzira na jačinu struje kroz njega.

Trenutna snaga idealnog naponskog generatora, za referentne smerove napona i struje prikazane na slici 3.7, je

$$p(t) = u(t)i(t) = e(t)i(t).$$

Ako bi se referentni smer struje promenio, izraz za snagu bi dobio negativan predznak.



Slika 3.7. Idealan naponski generator.

3.4.2. Idealan strujni generator

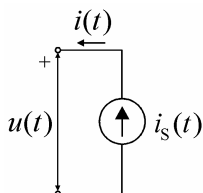
Prema definiciji idealnog strujnog generatora, za referentne smerove struje i napona prikazane na slici 3.8, važi

$$i(t) = i_s(t).$$

Jačina struje kroz priključke idealnog strujnog generatora je $i_s(t)$, bez obzira na napon na generatoru.

Trenutna snaga idealnog strujnog generatora, za referentne smerove napona i struje prikazane na slici 3.8, je

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)i_s(t).$$



Slika 3.8. Idealan strujni generator.

3.4.3. Otpornik

Na osnovu Omovog zakona, napon između krajeva otpornika direktno je proporcionalan jačini struje kroz njega (slika 3.9),

$$u(t) = Ri(t).$$

Pretpostavimo da je jačina struje kroz otpornik data izrazom

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi).$$

Tada je napon na otporniku

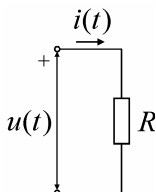
$$u(t) = Ri(t) = \sqrt{2}RI \cos(\omega t + \psi).$$

Poređenjem sa standardnim oblikom za napon, $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta)$, dobija se $U = RI$ i $\theta = \psi$. Dakle, efektivne vrednosti napona i struje otpornika povezane su relacijom

$$U = RI,$$

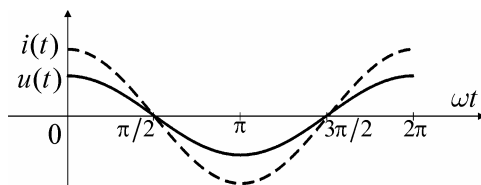
a napon i struja otpornika su u fazi. Fazna razlika napona i struje otpornika jednaka je nuli,

$$\varphi = 0.$$



Slika 3.9. Usaglašeni referentni smerovi struje i napona na otporniku.

Primer struje i napona otpornika prikazan je na slici 3.10.



Slika 3.10. Primer struje i napona na otporniku.

Trenutna snaga otpornika jednaka je

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}.$$

Nakon zamene izraza za napon i struju otpornika, prethodni izraz postaje

$$p(t) = 2RI^2 \cos^2(\omega t + \psi).$$

Korišćenjem trigonometrijskog identiteta $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$, prethodna relacija dobija oblik

$$p(t) = RI^2 + RI^2 \cos(2\omega t + 2\psi).$$

Snaga na otporniku ima konstantan član RI^2 i prostoperiodičan član. Srednja vrednost prostoperiodične veličine jednaka nuli, pa je srednja snaga otpornika

$$P = RI^2,$$

što se i moglo očekivati na osnovu definicije efektivne vrednosti.

3.4.4. Kalem

Kada u kalemu postoji promenljiva struja u njemu se indukuje elektromotorna sila. Ta elektromotorna sila u odnosu na referentni smer struje prikazan na slici 3.11, po Faradejevom zakonu elektromagnetske indukcije jednaka je

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Kako je $u(t) = -e_{\text{ind}}(t)$ i $\Phi(t) = Li(t)$, za relaciju između napona i struje kalema dobija se

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Napon na kalemu srazmeran prvom izvodu struje po vremenu. Pretpostavimo da je jačina struje kroz kalem data izrazom

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi).$$

Tada je napon kalema

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\sqrt{2}\omega LI \sin(\omega t + \psi).$$

S obzirom da je $-\sin(\omega t + \psi) = \cos(\omega t + \psi + \pi/2)$ za napon na kalemu dobija se

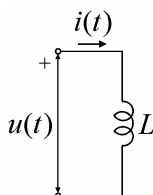
$$u(t) = \sqrt{2}\omega LI \cos(\omega t + \psi + \pi/2).$$

Poređenjem sa standardnim oblikom za napon, $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta)$, dobija se $U = \omega LI$ i $\theta = \psi + \pi/2$. Dakle, efektivne vrednosti napona i jačine struje povezane su relacijom

$$U = \omega LI,$$

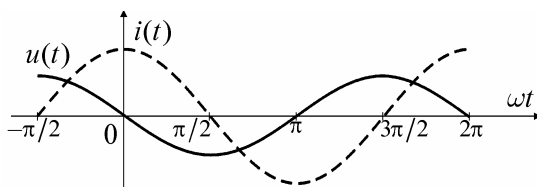
a napon prednjači struji za $\pi/2$. Fazna razlika napona i struje kalema, $\varphi = \theta - \psi$, je

$$\varphi = \pi/2.$$



Slika 3.11. Usaglašeni referentni smerovi struje i napona na kalemu.

Primer struje i napona kalema prikazan je na slici 3.12.



Slika 3.12. Primer struje i napona na kalemu.

Trenutna snaga kalema jednaka je

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Nakon zamene izraza za napon i struju kalema, prethodni izraz postaje

$$p(t) = -2\omega LI^2 \sin(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi).$$

Korišćenjem trigonometrijskog identiteta $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, prethodna relacija postaje

$$p(t) = -\omega LI^2 \sin(2\omega t + 2\psi).$$

Trenutna snaga na kalemu ima samo prostoperiodičan član. Tokom četvrtine periode kalem prima energiju iz kola, da bi je u toku sledeće četvrtine u potpunosti

vratio kolu. S obzirom da je srednja vrednost prostoperiodične veličine jednaka nuli, srednja snaga kalema jednaka nuli,

$$P = 0.$$

3.4.5. Kondenzator

Naelektrisanje kondenzatora je srazmerno naponu,

$$q(t) = Cu(t),$$

gde je C kapacitivnost kondenzatora. S obzirom da je napon na kondenzatoru vremenski promenljiv, naelektrisanja na njegovim elektrodama će se menjati u vremenu. U priključcima kondenzatora postoji struja jačine

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$

Iz prethodne dve jednačine dobija se relacija

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

Pretpostavimo da je napon kondenzatora dat izrazom

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta).$$

Tada je jačina struje u priključcima kondenzatora

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -\sqrt{2}\omega CU \sin(\omega t + \theta).$$

S obzirom da je $-\sin(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta + \pi/2)$ za struju kondenzatora dobija se

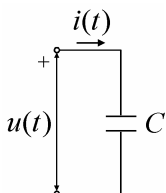
$$i(t) = \sqrt{2}\omega CU \cos(\omega t + \theta + \pi/2).$$

Poređenjem sa standardnim oblikom za jačinu struje, $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi)$, dobija se $I = \omega CU$, odnosno $U = I/(\omega C)$, i $\psi = \theta + \pi/2$. Dakle, efektivne vrednosti napona i jačine struje kondenzatora povezane su relacijom

$$U = \frac{I}{\omega C},$$

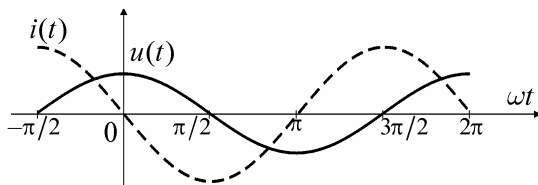
a struja prednjači naponu za $\pi/2$. Fazna razlika napona i jačine struje kondenzatora, $\varphi = \theta - \psi$, jednaka je

$$\varphi = -\pi/2.$$



Slika 3.13. Usaglašeni referentni smerovi struje i napona na kondenzatoru.

Primer struje i napona kondenzatora prikazan je na slici 3.14.



Slika 3.14. Primer struje i napona na kondenzatoru.

Trenutna snaga kondenzatora jednaka je

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Nakon zamene izraza za napon i struju kondenzatora, prethodni izraz postaje

$$p(t) = -2\omega CU^2 \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \theta).$$

Korišćenjem trigonometrijskog identiteta $2\sin x \cos x = \sin 2x$, prethodna relacija dobija oblik

$$p(t) = -\omega CU^2 \sin(2\omega t + 2\theta).$$

Snaga na kondenzatoru ima samo prostoperiodičan član. Tokom četvrtine periode kondenzator prima energiju iz kola, da bi je u toku sledeće četvrtine u potpunosti vratio kolu. S obzirom da je srednja vrednost prostoperiodične veličine jednaka nuli, srednja snaga kondenzatora jednaka nuli,

$$P = 0.$$

3.4.6. Osnovne relacije, fazna razlika i srednja snaga otpornika, kalema i kondenzatora

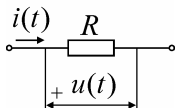
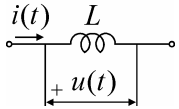
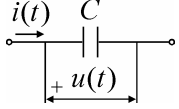
U ovom odeljku dat je pregled osnovnih relacija, faznih razlika i srednjih snaga otpornika, kalema u kondenzatora u prostoperiodičnom režimu. Sve relacije su izvedene i objašnjene u prethodna tri odeljka.

U tabeli 3.1 date su relacije koje povezuju trenutne i efektivne vrednosti napona i struje, zatim fazna razlika, kao i srednja snaga otpornika, kalema i kondenzatora.

Kada kroz otpornik postoji prostoperiodična struja na njemu se razvija toplota. Srednja snaga otpornika jednaka je RI^2 , gde je I efektivna vrednost struje kroz otpornik.

U kalemu i kondenzatoru energija se ne troši, i srednja snaga kalema, kao i srednja snaga kondenzatora jednake su nuli. Kondenzator se u kolu prostoperiodične struje periodično puni i prazni. Kada se kondenzator puni, energija iz kola prelazi u kondenzator, a kada se kondenzator prazni, energija se iz kondenzatora vraća u kolo. Pri porastu struje, energija se iz kola prenosi u kalem (u njegovo magnetsko polje). Pri smanjenju struje, energija se iz magnetskog polja kalema vraća u kolo. Kondenzator i kalem ne troše energiju, već je periodično razmenjuju sa ostatkom kola.

Tabela 3.1. Osnovne relacije, fazna razlika i srednja snaga prijemnika.

Prijemnik	Osnovna relacija	U/I	$\varphi = \theta - \psi$	Srednja snaga
	$u(t) = Ri(t)$	$\frac{U}{I} = R$	$\varphi = 0$	RI^2
	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$\frac{U}{I} = \omega L$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	0
	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	0

3.5. Analiza kola u prostoperiodičnom režimu

Za kola sa prostoperiodičnim strujama važe Kirhofovi zakoni. Ti zakoni imaju istu formulaciju kao i za kola vremenski konstatnih struja, samo što se radi o prostoperiodičnim naponim i strujama.

Prvi Kirhofov zakon za jedan čvor glasi da je algebarski zbir trenutnih vrednosti jačina struja svih grana koje se susreću u čvoru jednak nuli. Matematička formulacija Prvog Kirhofovog zakona glasi

$$\sum i(t) = 0. \quad (3.12)$$

Sa pozitivnim znakom se uzimaju struje koje izlaze iz čvora, dok se sa negativnim znakom uzimaju one koje ulaze u čvor.

Drugi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir trenutnih vrednosti napona duž ma koje zatvorene konture u kolu jednak nuli. Matematička formulacija Drugog Kirhofovog zakona glasi

$$\sum u(t) = 0. \quad (3.13)$$

Smer obilaska konture se bira između dva moguća smera. Pravilo o predznacima je isto kao i u slučaju vremenski konstantnih struja.

Posledica Drugog Kirhofovog zakona je da se napon između dve tačke u kolu može odrediti kao algebarski zbir napona duž proizvoljnog puta od prve do druge tačke. Pravilo o predznacima je isto kao i za jednačine po Drugom Kirhofovom zakonu.

Posmatrajmo kolo koje ima n_c čvorova i n_g grana. Po Prvom Kirhofovom zakonu za ovo kolo može da se napiše $(n_c - 1)$ nezavisna jednačina. Po Drugom Kirhofovom zakonu za kolo koje ima n_c čvorova i n_g grana može da se napiše $n_g - (n_c - 1)$ nezavisna jednačina.

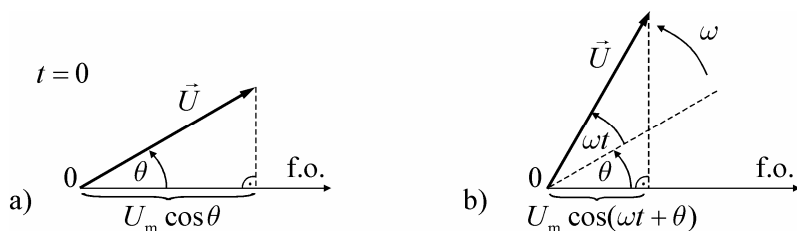
Videli smo da relacije između napona i struje na kalemu i kondenzatoru sadrže i izvode po vremenu. Zbog toga bi rešavanje kola prostoperiodičnih struja u vremenskom domenu zahtevalo rešavanje diferencijalnih ili integro-diferencijalnih jednačina, što je veoma teško. Da bi se premostile teškoće u rešavanju sistema jednačina, uvode se kompleksni predstavnici i koristi se kompleksni račun. Time se postiže da se diferencijalne i integro-diferencijalne jednačine preslikaju u algebarske jednačine.

3.6. Fazori

Posmatrajmo vektor $\vec{U}$ prikazan na slici 3.15.a. Početak vektora se poklapa sa početkom ose, koju ćemo zvati fazna osa. Faznu osu ćemo označavati sa "f.o.". Neka je sa U_m označena dužina tog vektora, $U_m = |\vec{U}|$, a sa θ ugao koji taj vektor zaklapa sa faznom osom. Referentni smer za računanje uglova je suprotan od smera kretanja kazaljke na časovniku (matematički pozitivan smer). Projekcija vektora $\vec{U}$ na faznu osu jednaka je $U_m \cos \theta$.

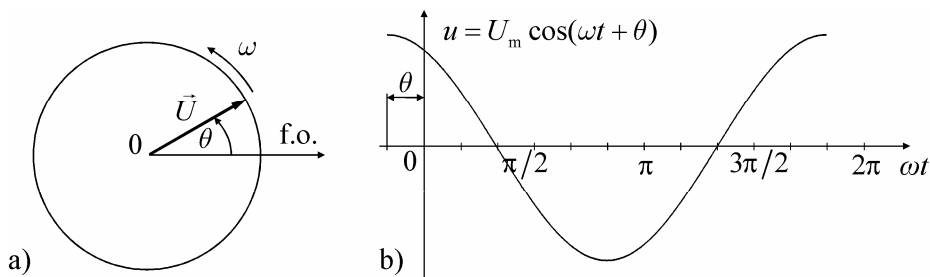
Zamislimo sada da vektor $\vec{U}$ rotira ugaonom brzinom ω oko tačke 0 (početka fazne ose) u pozitivnom matematičkom smeru, kao što je označeno na slici 3.15.b. Ako vektor $\vec{U}$ u trenutku $t = 0$ zaklapa ugao θ sa faznom osom, onda vektor $\vec{U}$ u trenutku t zaklapa ugao $(\omega t + \theta)$ sa faznom osom. Označimo projekciju ovog vektora na faznu osu sa $u(t)$. Projekcija ovog vektora na faznu osu je prostoperiodična funkcija $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$. Amplituda projekcije U_m jednaka je dužini vektora, kružna frekvencija jednaka je ugaonoj brzini, a početna faza jednaka je uglu koji vektor zaklapa sa faznom osom u trenutku $t = 0$. Prema tome,

vektor $\vec{U}$ predstavlja prostoperiodičnu veličinu $u(t)$. Vektor $\vec{U}$ naziva se fazor. Fazor se izražava u istim jedinicama kao i veličina koju predstavlja.



Slika 3.15. Projekcija vektora na faznu osu a) nepokretnog vektora i b) vektora koji rotira.

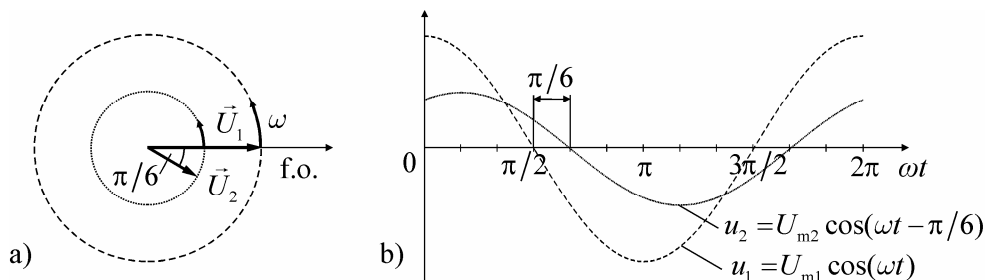
Trenutne vrednosti projekcija vektora $\vec{U}$ na faznu osu, za jedan kompletan ciklus, nacrtane su na slici 3.16.b.



Slika 3.16. a) Rotirajući vektor i b) trenutne vrednosti projekcija na faznu osu.

Posmatrajmo sada dva vektora, $\vec{U}_1$ i $\vec{U}_2$, koji rotiraju istom ugaonom brzinom ω . Neka je smer rotacije suprotan od smera kretanja kazaljke na časovniku, i neka $\vec{U}_2$ zaostaje u odnosu na $\vec{U}_1$ za $\pi/6$. Ovi rotirajući vektori u trenutku $t=0$ su prikazani na slici 3.17.a. Neka je sa U_{m1} označena dužina vektora $\vec{U}_1$, a sa U_{m2} dužina vektora $\vec{U}_2$.

Trenutne vrednosti projekcija ovih vektora na faznu osu, za jedan kompletan ciklus, nacrtane su na slici 3.17.b. Kružne frekvencija ove dve prostoperiodične veličine su jednake. Amplitude ovih prostoperiodičnih funkcija odgovaraju dužinama fazora. Ugaona razlika između vektora $\vec{U}_1$ i $\vec{U}_2$ od $\pi/6$ jednaka je faznoj razlici između projekcija ovih vektora. Ova dva fazora mogu da odgovaraju prostoperiodičnim naponima ili prostoperiodičnim strujama.



Slika 3.17. a) Dva rotirajuća vektora i b) trenutne vrednosti projekcija na faznu osu.

Položaj fazora u proizvoljnom trenutku jednoznačno je određen ako se zna položaj fazora u trenutku $t=0$. Položaj fazora u trenutku t dobija se rotacijom fazora u početnom položaju (u trenutku $t=0$) za ugao ωt u pozitivnom matematičkom smeru. Prema tome, dovoljno je nacrtati fazore u trenutku $t=0$.

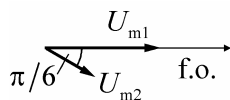
Smer rotacije fazora je uvek suprotan od smera kretanja kazaljke na časovniku. Ovaj smer se obično ne prikazuje na fazorskom dijagramu.

Ako dve prostoperiodične funkcije prikazane na slici 3.17.b predstavljaju dva napona u_1 i u_2 , onda su oni opisani izrazima

$$u_1 = U_{m1} \cos(\omega t),$$

$$u_2 = U_{m2} \cos(\omega t - \pi/6).$$

Grafičkim predstavljanjem prostoperiodičnih veličina kao fazora dobija se fazorski dijagram. Dva napona razmatrana do sada mogu da se predstave na način prikazan na slici 3.18. Početna faza napona u_1 jednaka je nuli, zbog čega je njegov fazor prikazan kao horizontalan vektor. S obzirom da u_2 kasni u odnosu na u_1 za $\pi/6$, smer fazora napona u_2 se dobija rotacijom fazora napona u_1 za $\pi/6$ u smeru suprotnom od matematički pozitivnog smera. Dužine fazora odgovaraju amplitudama napona.



Slika 3.18. Fazorski dijagram dva napona.

3.6.1. Osnovni pojmovi o fazorima

U kolima sa prostoperiodičnim strujama, skoro uvek se koriste efektivne vrednosti. Zbog toga, pri crtanju fazorskog dijagrama, dužina fazora odgovara efektivnoj vrednosti odgovarajuće veličine (a ne amplitudi kao u prethodnom

odeljku). Takve fazore označavaćemo sa $\underline{U}$ odnosno $\underline{I}$. Uprošćeno ćemo govoriti da je $\underline{U}$ fazor napona $u(t)$, a $\underline{I}$ fazor struje $i(t)$.

Pri analizi električnih kola u prostoperiodičnom režimu, obično je frekvencija poznata. U tom slučaju svaka prostoperiodična veličina (napon, jačina struje, elektromotona sila) je potpuno određena svojom efektivnom vrednošću i početnom fazom. Zato, svakoj prostoperiodičnoj veličini odgovara jedan i samo jedan fazor. Važi i obrnuto, svakom fazoru odgovara jedna i samo jedna prostoperiodična veličina (ako je frekvencija poznata).

Ugao koji fazor zaklapa sa faznom osom jednak je početnoj fazi prostoperiodične veličine. To ćemo zapisati u sledećem obliku $\underline{U} = U|\underline{\theta}$, odnosno $\underline{I} = I|\underline{\psi}$, gde su U i I efektivne vrednosti, a θ i ψ početne faze napona i struje.

Promena faze prostoperiodične veličine preslikava se u rotaciju fazora. Na primer, povećanje faze za $\pi/2$ preslikava se u rotaciju fazora za $\pi/2$ u matematički pozitivnom smeru. Smanjenje početne faze za $\pi/2$ preslikava se u rotaciju fazora u smeru suprotnom od matematički pozitivnog smera.

Ma koji broj prostoperiodičnih napona i struja može da se predstavi na jednom fazorskom dijagramu, pod uslovom da imaju istu frekvenciju.

Primer 3.4

Vremenski oblici četiri struje su

$$i_1(t) = 4,24 \cos(\omega t + \pi/4)A, \quad i_2(t) = 5,66 \cos(\omega t - \pi/3)A,$$

$$i_3(t) = 8,49 \cos(\omega t)A, \quad i_4(t) = 2,83 \sin(\omega t)A.$$

Nacrtati fazore ovih struja na istom fazorskom dijagramu.

Rešenje.

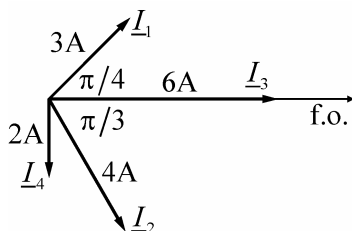
Trenutna vrednost jačine struje $i_4(t)$ može da se izrazi preko kosinusa na sledeći način

$$i_4(t) = 2,83 \cos(\omega t - \pi/2)A.$$

Poređenjem vremenskih oblika struja sa $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi)$ dobijaju se njihove efektivne vrednosti i početne faze

$$\begin{array}{llll} I_1 = 3A; & \psi_1 = \frac{\pi}{4}, & I_2 = 4A; & \psi_2 = -\frac{\pi}{3}, \\ I_3 = 6A; & \psi_3 = 0, & I_4 = 2A; & \psi_4 = -\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

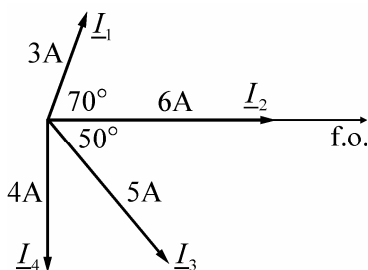
Fazorski dijagram ovih struja prikazan je na slici 3.19.



Slika 3.19. uz primer 3.4.

Primer 3.5

Dijagram na slici 3.20 prikazuje fazore četiri prostoperiodične struje. Dužina fazora odgovara njihovoj efektivnoj vrednosti. Napisati vremenske oblike sve četiri jačine struje.



Slika 3.20. uz primer 3.5.

Rešenje.

Efektivne vrednosti i početne faze struja iznose

$$\begin{aligned}
 I_{m1} &= 3\sqrt{2} \text{ A} = 4,24 \text{ A}; & \psi_1 &= 70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} = 1,22, \\
 I_{m2} &= 6\sqrt{2} \text{ A} = 8,49 \text{ A}; & \psi_2 &= 0^\circ = 0, \\
 I_{m3} &= 5\sqrt{2} \text{ A} = 7,07 \text{ A}; & \psi_3 &= -50^\circ = -50 \cdot \frac{\pi}{180} = -0,87, \\
 I_{m4} &= 4\sqrt{2} \text{ A} = 5,66 \text{ A}; & \psi_4 &= -90^\circ = -90 \cdot \frac{\pi}{180} = -1,57.
 \end{aligned}$$

Vremenski oblici glase

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= 4,24 \cos(\omega t + 1,22) \text{ A}, \\
 i_2(t) &= 8,49 \cos(\omega t) \text{ A}, \\
 i_3(t) &= 7,07 \cos(\omega t - 0,87) \text{ A}, \\
 i_4(t) &= 5,55 \cos(\omega t - 1,57) \text{ A}.
 \end{aligned}$$

3.6.2. Fazorski dijagrami napona i struje na otporniku, kalemu i kondenzatoru

U ovom odeljku su prikazani fazori napona i struje na otporniku, kalemu i kondenzatoru.

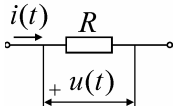
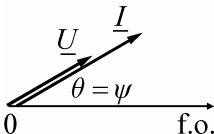
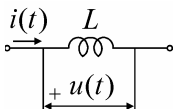
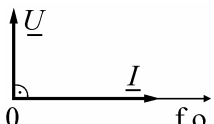
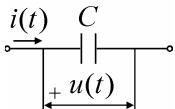
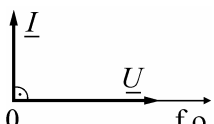
Napon i struja na otporniku su u fazi, pa su fazori napona i struje otpornika kolinearni vektori.

Napon na kalemu fazno prednjači struji za $\pi/2$. Smer fazora napona kalema dobija se rotacijom fazora struje za ugao $\pi/2$ u matematički pozitivnom smeru.

Napon na kondenzatoru fazno kasni za strujom za $\pi/2$. Smer fazora napona kondenzatora dobija se rotacijom fazora struje za ugao $\pi/2$ u smeru suprotnom od matematički pozitivnog smera.

U tabeli 3.1 su date osnovne relacije i fazorski dijagrami napona i struje na otporniku, kalemu i kondenzatoru.

Tabela 3.2. Fazorski dijagrami napona i struje na otporniku, kalemu i kondenzatoru.

Prijemnici	Osnovna relacija	$Z = \frac{U}{I}$	$\varphi = \theta - \psi$	Fazorski dijagram
	$u = Ri$	R	$\varphi = 0$	
	$u = L \frac{di}{dt}$	ωL	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	
	$i = C \frac{du}{dt}$	$\frac{1}{\omega C}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	

3.7. Kompleksni račun

Prostoperiodične veličine mogu da se predstavljaju kompleksnim brojevima. Zato ćemo se u ovom odeljku podsetiti kompleksnih brojeva i operacija sa kompleksnim brojevima.

3.7.1. Kompleksni brojevi

U elektrotehnici, imaginarna jedinica se označava sa

$$j = \sqrt{-1}, \quad (3.14)$$

jer i označava jačinu struje. Posebno je $j^2 = -1$, $j(-j) = 1$, $1/j = -j$.

Kompleksne brojeve ćemo označavati sa crtom ispod simbola. Kompleksni broj u eksponencijalnom obliku glasi

$$\underline{z} = z e^{j\varphi}, \quad (3.15)$$

gde je $z = |\underline{z}|$ moduo kompleksnog broja, a φ njegov argument.

Ojlerov obrazac,

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi, \quad (3.16)$$

omogućava da se kompleksni broj iz eksponencijalnog oblika transformiše u algebarski oblik,

$$\underline{z} = a + jb, \quad (3.17)$$

gde je

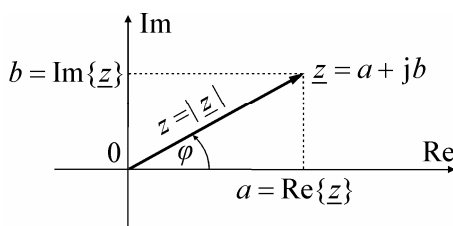
$$a = z \cos \varphi, \quad b = z \sin \varphi. \quad (3.18)$$

Realan deo kompleksnog broja je $\operatorname{Re}\{\underline{z}\} = a$, a imaginaran deo je $\operatorname{Im}\{\underline{z}\} = b$.

Kompleksni broj je u potpunosti definisan svojim modulom i svojim argumentom. Isto tako, kompleksni broj je u potpunosti definisan svojim realnim i svojim imaginarnim delom.

Svaki kompleksni broj može da se prikaže grafički u kompleksnoj ravni, kao na slici 3.21. Svakom kompleksnom broju odgovara jedna i samo jedna tačka u kompleksnoj ravni. I obrnuto, svakoj tački kompleksne ravni, odgovara jedan i samo jedan kompleksan broj. Kompleksnom broju se može pridružiti vektor, čiji je početak u koordinatnom početku, a kraj u tački koja odgovara kompleksnom broju (slika 3.21). Dužina tog vektora je moduo kompleksnog broja i može da se odredi primenom Pitagorine teoreme

$$z = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.19)$$



Slika 3.21. Grafičko prikazivanje kompleksnog broja u kompleksnoj ravni.

Ugao između vektora i realne ose je argument kompleksnog broja. Tangens tog ugla (slika 3.21) jednak je količniku iz imaginarnog dela (naspramne katete) i realnog dela kompleksnog broja (nalegle katete),

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}\{\underline{z}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{z}\}}. \quad (3.20)$$

Ako je kompleksan broj dat u algebarskom obliku, njegov argument može da se odredi na način prikazan u tabeli 3.3.

Kada je realan deo kompleksnog broja pozitivan, tada se argument određuje kao arkus tangens količnika imaginarnog i realnog dela kompleksnog broja,

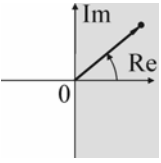
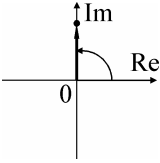
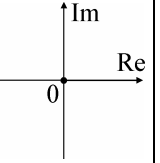
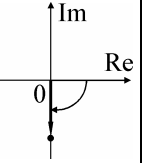
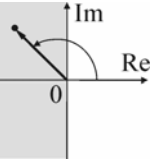
$$\varphi = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{\underline{z}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{z}\}}, \quad \operatorname{Re}\{\underline{z}\} > 0.$$

Kada je realan deo kompleksnog broja negativan tada se argument određuje kao

$$\varphi = \pi + \arctg \frac{\operatorname{Im}\{\underline{z}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{z}\}}, \quad \operatorname{Re}\{\underline{z}\} < 0.$$

Ako je realan deo kompleksnog broja jednak nuli, tada se kompleksni broj nalazi na imaginarnoj osi. U tom slučaju, ako je imaginaran deo pozitivan, argument je jednak $\pi/2$, a ako je imaginaran deo negativan, argument je jednak $-\pi/2$. Kada su i realan i imaginaran deo jednaki nuli, tada se po dogovoru uzima da je i argument jednak nuli.

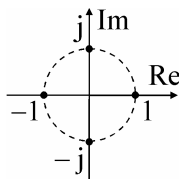
Tabela 3.3. Određivanje argumenta kompleksnog broja.

$\operatorname{Re}\{z\} > 0$	$\operatorname{Re}\{z\} = 0$ $\operatorname{Im}\{z\} > 0$	$\operatorname{Re}\{z\} = 0$ $\operatorname{Im}\{z\} = 0$	$\operatorname{Re}\{z\} = 0$ $\operatorname{Im}\{z\} < 0$	$\operatorname{Re}\{z\} < 0$
$\varphi = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}$	$\varphi = \pi/2$	$\varphi = 0$	$\varphi = -\pi/2$	$\varphi = \pi + \arctg \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}$
				

Argument čisto realnih brojeva je 0 ili π . Argument pozitivnih realnih brojeva jednak je 0, dok je argument negativnih realnih brojeva jednak π . Argument čisto imaginarnih brojeva je $\pi/2$ ili $-\pi/2$, u zavisnosti da li je imaginaran deo pozitivan ili negativan, respektivno. Posebno (slika 3.22),

$$1 = e^{j0}, \quad j = e^{j\pi/2}, \quad -1 = e^{j\pi}, \quad -j = e^{-j\pi/2}.$$

Moduo sva četiri kompleksna broja jednak je 1.

**Slika 3.22. Kompleksni brojevi 1, j, -1 i -j.**

3.7.2. Operacije sa kompleksnim brojevima

Dva kompleksna broja su jednaka, ako i samo ako su im istovremeno jednaki i realni i imaginarni delovi. Tada su im jednaki i moduli i argumenti.

Dva kompleksna broja, $z_1 = a_1 + jb_1$ i $z_2 = a_2 + jb_2$, sabiraju se tako što im se posebno saberu realni, a posebno imaginarni delovi,

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2). \quad (3.21)$$

Razlika dva kompleksna broja, $z_1 = a_1 + jb_1$ i $z_2 = a_2 + jb_2$, određuje se na sledeći način

$$z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2). \quad (3.22)$$

Proizvod dva kompleksna broja, $\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$ i $\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$, računa se prema formuli

$$\underline{z}_1 \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2). \quad (3.23)$$

Kompleksni brojevi mogu da se pomnože i ako su u eksponencijalnom obliku, $\underline{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ i $\underline{z}_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$,

$$\underline{z}_1 \underline{z}_2 = z_1 z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (3.24)$$

Svaki kompleksni broj $\underline{z} = a + jb = z e^{j\varphi}$ ima svoj konjugovano kompleksni broj (operacija konjugovanja označava se sa *),

$$\underline{z}^* = a - jb = z e^{-j\varphi}. \quad (3.25)$$

Kompleksan broj i njegov konjugovano kompleksan broj imaju iste module, a argumenti im imaju suprotne znake. Kompleksni broj i njegov konjugovano kompleksni broj imaju jednake realne delove, dok im imaginarni delovi imaju suprotan znak. Proizvod konjugovano kompleksnih brojeva,

$$\underline{z} \underline{z}^* = z^2 = a^2 + b^2, \quad (3.26)$$

jednak je kvadratu modula kompleksnog broja.

Kada se dele dva kompleksna broja, $\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$ i $\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$, postupa se na sledeći način

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \cdot \frac{\underline{z}_2^*}{\underline{z}_2^*} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} \cdot \frac{(a_2 - jb_2)}{(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(-a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Kompleksni brojevi mogu da se podele i ako su u eksponencijalnom obliku, $\underline{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ i $\underline{z}_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$,

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (3.27)$$

3.8. Kompleksni predstavnici

Alat koji se koristi za analizu električnih kola u prostoperiodičnom režimu baziran je na kompleksnim predstavnicima napona i struja.

Kompleksni broj koji odgovara fazoru označićemo na isti način kao i fazor. Na primer, fazor $\underline{U}$ predstavlja prostoperiodičan napon $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta)$. Odgovarajući kompleksni broj $\underline{U}$ zvaćemo kompleksnim predstavnikom. Eksponencijalni oblik kompleksnog predstavnika prostoperiodičnog napona $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta)$ je

$$\underline{U} = U e^{j\theta}. \quad (3.28)$$

Kada se uporede kompleksni predstavnik napona $\underline{U} = U e^{j\theta}$ i prostoperiodičan napon $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta)$ vidi se da je moduo kompleksnog predstavnika jednak efektivnoj vrednosti napona, dok je argument jednak početnoj fazi.

Kompleksni predstavnik se izražava u istim jedinicama kao i veličina koju predstavlja.

Kao primer, neka je zadat prostoperiodičan napon $u(t) = 28,2 \cos(\omega t - \pi/3)$ V. Amplituda ovog napona je 28,2V, pa je njegova efektivna vrednost jednaka $U = 28,2 \text{ V} / \sqrt{2} = 20 \text{ V}$. Početna faza je $\theta = -\pi/3$. Kompleksni predstavnik napona je $\underline{U} = 20 e^{-j\pi/3} \text{ V}$.

Isto pravilo važi i za druge prostoperiodične veličine, kao na primer struju ili elektromotornu silu. Kompleksni predstavnici prostoperiodične struje $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi)$ i prostoperiodične elektromotorne sile $e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta)$ su

$$\underline{I} = I e^{j\psi}, \quad (3.29)$$

$$\underline{E} = E e^{j\theta}. \quad (3.30)$$

Na primer, neka je zadata prostoperiodična struja $i(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$ A. Amplituda struje je $10\sqrt{2}$ A, pa je efektivna vrednost $I = 10$ A. Početna faza je $\psi = \pi/4$. Kompleksni predstavnik struje je $\underline{I} = 10 e^{j\pi/4}$ A. Slično, ako je zadata elektromotorna sila $e(t) = 14,1 \cos(\omega t - \pi/6)$ V, kompleksni predstavnik je $\underline{E} = 10 e^{-j\pi/6}$ V.

Primenom Ojlerovog obrasca, $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, kompleksni predstavnici napona, struje i elektromotorne sile mogu se iz eksponencijalnog oblika transformisati u algebarski oblik,

$$\underline{U} = U e^{j\theta} = U \cos \theta + j U \sin \theta, \quad (3.31)$$

$$\underline{I} = I e^{j\psi} = I \cos \psi + j I \sin \psi, \quad (3.32)$$

$$\underline{E} = E e^{j\theta} = E \cos \theta + j E \sin \theta. \quad (3.33)$$

Algebarski oblik kompleksnog predstavnika prostoperiodičnog napona $u(t) = 28,2 \cos(\omega t - \pi/3)$ V je

$$\underline{U} = 20 e^{-j\pi/3} \text{ V} = 20 \cos(-\pi/3) + j 20 \sin(-\pi/3) = (10 - j 10\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Analogno, algebarski oblici prostoperiodične struje $i(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$ A i prostoperiodične elektromotorne sile $e(t) = 14,1 \cos(\omega t - \pi/6)$ V su

$$\underline{I} = 10 e^{j\pi/4} \text{ A} = 10 \cos(\pi/4) + j 10 \sin(\pi/4) = (5\sqrt{2} + j 5\sqrt{2}) \text{ A},$$

$$\underline{E} = 10 e^{-j\pi/6} = 10 \cos(-\pi/6) + j 10 \sin(-\pi/6) = (5\sqrt{3} - j 5) \text{ V}.$$

Obrnuto, ako je poznat kompleksni predstavnik, vremenski oblik prostoperiodične veličine određuje se na sledeći način. Prvo se kompleksni predstavnik napiše u eksponencijalnom obliku. Postupak određivanja eksponencijalnog oblika kompleksnog napona kada je poznat njegov algebarski oblik je dat sa

$$\underline{U} = U_{\text{Re}} + jU_{\text{Im}} = \sqrt{U_{\text{Re}}^2 + U_{\text{Im}}^2} e^{j\text{Arg } U} = U e^{j\theta}. \quad (3.34)$$

Postupak određivanja argumenta kompleksnog broja opisan je u tabeli 3.3. Zatim se iz eksponencijalnog oblika $U e^{j\theta}$ pročitaju efektivna vrednost, U , i početna faza, θ . Efektivna vrednost napona jednaka je modulu kompleksnog predstavnika, dok je početna faza jednaka argumentu kompleknog predstavnika. Vremenski oblik napona je $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta)$. Analogno se postupa i za druge prostoperiodične veličine (struju, elektromotornu silu itd.).

Kao primer, neka je zadata kompleksna jačina struje u algebarskom obliku $\underline{I} = -1 \text{ A}$. Eksponencijalni oblik ove kompleksne struje je $\underline{I} = 1e^{j\pi} \text{ A}$. Efektivna vrednost struje jednaka je $I = 1 \text{ A}$, a početna faza je $\psi = \pi$. Vremenski oblik struje glasi $i(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t + \pi)$.

Kao drugi primer, neka je dat kompleksni predstavnik napona u algebarskom obliku $\underline{U} = (3 + j4) \text{ V}$. Eksponencijalni oblik ovog kompleksnog napona glasi

$$\underline{U} = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{j\arctg(4/3)} = 5e^{j0,93} \text{ V}.$$

Moduo kompleksnog predstavnika $U = 5 \text{ V}$ jednak je efektivnoj vrednosti napona, a argument kompleksnog predstavnika $\theta = 0,93 \text{ rad}$ jednak je početnoj fazi napona. Vremenski oblik napona glasi $u(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 0,93)$.

Primer 3.6

Za kompleksne napone: $\underline{U}_1 = 4\sqrt{2} \text{ V}$, $\underline{U}_2 = (4 + j4) \text{ V}$, $\underline{U}_3 = j4\sqrt{2} \text{ V}$, $\underline{U}_4 = (-4 + j4) \text{ V}$, $\underline{U}_5 = -4\sqrt{2} \text{ V}$, $\underline{U}_6 = (-4 - j4) \text{ V}$, $\underline{U}_7 = -j4\sqrt{2} \text{ V}$, $\underline{U}_8 = (4 - j4) \text{ V}$.

- nacrtati kompleksne predstavnike u kompleksnoj ravni,
- odrediti module i argumente,
- odrediti efektivne vrednosti, amplitude i početne faze napona,
- napisati eksponencijalni oblik kompleksnih predstavnika,
- napisati vremenske oblike napona.

Rešenje.

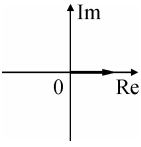
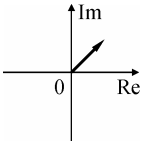
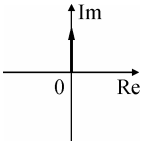
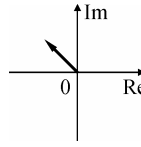
Kompleksni predstavnici u kompleksnoj ravni, njihovi moduli, efektivne vrednosti i amplitude, kao i argumenti, početne faze, eksponencijalni i vremenski oblici dati su u tabeli 3.4.

Moduli svih kompleksnih napona su isti i jednaki $4\sqrt{2}$ V, pa su i efektivne vrednosti $4\sqrt{2}$ V, dok su amplitude $\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}$ V = 8 V.

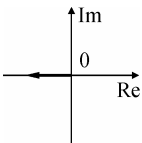
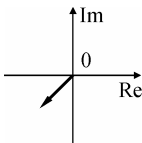
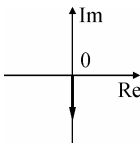
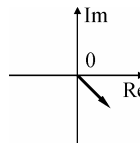
Argumenti kompleksnih napona određuju se prema tabeli 3.3, ali mogu da se odrede i iz grafičkog prikaza kompleksnih predstavnika u kompleksnoj ravni. Argumenti kompleksnih napona jednaki su početnim fazama.

Kada su poznate efektivne vrednosti (ili amplitude) i početne faze, tada mogu da se napišu eksponencijalni oblici kompleksnih napona, kao i njihovi vremenski oblici.

Tabela 3.4. uz primer 3.6.

kompleksni predstavnik	$\underline{U}_1 = 4\sqrt{2}$ V	$\underline{U}_2 = (4 + j4)$ V	$\underline{U}_3 = j4\sqrt{2}$ V	$\underline{U}_4 = (-4 + j4)$ V
kompleksna ravan				
moduo	$4\sqrt{2}$ V	$4\sqrt{2}$ V	$4\sqrt{2}$ V	$4\sqrt{2}$ V
efektivna vrednost	$4\sqrt{2}$ V	$4\sqrt{2}$ V	$4\sqrt{2}$ V	$4\sqrt{2}$ V
amplituda	8 V	8 V	8 V	8 V
argument	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
početna faza	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
eksponencijalni oblik	$4\sqrt{2} e^{j0}$ V	$4\sqrt{2} e^{j\pi/4}$ V	$4\sqrt{2} e^{j\pi/2}$ V	$4\sqrt{2} e^{j3\pi/4}$ V
vremenski oblik	$8 \cos(\omega t)$ V	$8 \cos(\omega t + \pi/4)$ V	$8 \cos(\omega t + \pi/2)$ V	$8 \cos(\omega t + 3\pi/4)$ V

Nastavak tabele uz primer 3.6.

kompleksni predstavnik	$\underline{U}_5 = -4\sqrt{2} \text{ V}$	$\underline{U}_6 = (-4 - j4) \text{ V}$	$\underline{U}_7 = -j4\sqrt{2} \text{ V}$	$\underline{U}_8 = (4 - j4) \text{ V}$
kompleksna ravan				
moduo	$4\sqrt{2} \text{ V}$	$4\sqrt{2} \text{ V}$	$4\sqrt{2} \text{ V}$	$4\sqrt{2} \text{ V}$
efektivna vrednost	$4\sqrt{2} \text{ V}$	$4\sqrt{2} \text{ V}$	$4\sqrt{2} \text{ V}$	$4\sqrt{2} \text{ V}$
amplituda	8 V	8 V	8 V	8 V
argument	π	$5\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$
početna faza	π	$5\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$
eksponencijalni oblik	$4\sqrt{2} e^{j\pi} \text{ V}$	$4\sqrt{2} e^{j5\pi/4} \text{ V}$	$4\sqrt{2} e^{-j\pi/2} \text{ V}$	$4\sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ V}$
vremenski oblik	$8 \cos(\omega t + \pi) \text{ V}$	$8 \cos(\omega t + 5\pi/4) \text{ V}$	$8 \cos(\omega t - \pi/2) \text{ V}$	$8 \cos(\omega t - \pi/4) \text{ V}$

3.9. Analiza električnih kola u kompleksnom domenu

Uvođenjem kompleksnih predstavnika i kompleksnog računa diferencijalne i integro-diferencijalne jednačine u vremenskom domenu se preslikavaju u algebarske jednačine u kompleksnom domenu. Diferenciranje u vremenskom domenu preslikava se u množenje sa $j\omega$ u kompleksnom domenu. Integracija (operacija inverzna diferenciranju) u vremenskom domenu preslikava se u deljenje sa $j\omega$ u kompleksnom domenu. Zato je kompleksni račun pogodan za analizu električnih kola u prostoperiodičnom režimu.

Množenje konstantnom u vremenskom domenu preslikava se u množenje istom tom konstantnom u kompleksnom domenu.

Sabiranje i oduzimanje u vremenskom domenu preslikava se u sabiranje i oduzimanje u kompleksnom domenu.

Posledica prethodnog stava je da se Prvi i Drugi Kirhofov zakon iz vremenskog domena preslikavaju na identične relacije u kompleksnom domenu.

Jednačine po Prvom Kirhofovom zakonu imaju oblik

$$\sum \underline{I} = 0. \quad (3.35)$$

Pravilo o predznacima je isto kao i u slučaju vremenski konstantnih struja. Prvi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir kompleksnih struja grana koje se stiču u jednom čvoru jednak nuli.

Jednačine po Drugom Kirhofovom zakonu imaju oblik

$$\sum \underline{U} = 0. \quad (3.36)$$

Smer obilaska konture se bira između dva moguća smera. Pravilo o predznacima je isto kao i u slučaju vremenski konstantnih struja. Drugi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir kompleksnih napona duž zatvorene konture jednak nuli.

Na primer, ako jednačina po Prvom Kirhofovom zakonu za neki čvor u vremenskom domenu glasi $i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) + i_5(t) = 0$, ta jednačina preslikana u kompleksni domen glasi $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 0$. Analogno, ako jednačina po Drugom Kirhofovom zakonu za neke konturu u vremenskom domenu glasi $u_1(t) - u_2(t) + u_3(t) - u_4(t) = 0$, ta jednačina preslikana u kompleksni domen glasi $\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0$.

Pokažimo da se diferenciranje u vremenskom domenu preslikava u množenje sa $j\omega$. Pretpostavimo da je jačina struje data izrazom $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi)$. Tada je njen izvod jednak

$$\frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}\omega I \cos(\omega t + \psi + \pi/2).$$

Kompleksni predstavnik jačine struje je $\underline{I} = I e^{j\psi}$, a kompleksni predstavnik izvoda po vremenu jednak je

$$\omega I e^{j(\psi + \pi/2)} = (e^{j\pi/2} \omega)(I e^{j\psi}) = j\omega \underline{I}.$$

Prema tome kompleksni predstavnik prvog izvoda dobija se množenjem kompleksnog predstavnika sa $j\omega$. Zato se kaže da se diferenciranje u vremenskom domenu preslikava u množenje sa $j\omega$ u kompleksnom domenu.

3.10. Kompleksna impedansa i admitansa

U osnovne prijemnike spadaju otpornik, kalem i kondenzator.

Neka je $\underline{U}$ kompleksni predstavnik napona, a $\underline{I}$ kompleksni predstavnik struje prijemnika. Po definiciji, količnik kompleksnih predstavnika napona i struje prijemnika,

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad [\Omega], \quad (3.37)$$

naziva se kompleksna impedansa. Jedinica za kompleksnu impedansu je om (Ω). U elektrotehnici se termin kompleksna impedansa obično skraćuje u impedansa. Grafički simbol koji se koristi u električnim kolima za impedansu prikazan je na slici 3.23.



Slika 3.23. Usaglašeni referentni smerovi struje i napona na impedansi.

Kompleksna impedansa je kompleksan broj, koji može da se napiše u obliku

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}, \quad (3.38)$$

gde je Z moduo kompleksne impedanse, a φ njen argument. Iz relacije (3.37) sledi da je moduo kompleksne impedanse jednak količniku efektivnih vrednosti napona i struje prijemnika,

$$Z = \frac{U}{I}. \quad (3.39)$$

Osim toga, iz relacije (3.37) sledi da je argument kompleksne impedanse jednak faznoj razlici napona i struje prijemnika.

$$\varphi = \theta - \psi. \quad (3.40)$$

3.10.1. Impedansa otpornika

Relacija koja povezuje napon i struju otpornika u vremenskom domenu glasi $u(t) = Ri(t)$. Množenje konstantnom u vremenskom domenu preslikava se u množenje istom konstantom u kompleksnom domenu. Zato su kompleksni napon i kompleksna jačina struje otpornika povezani relacijom

$$\underline{U} = R\underline{I}. \quad (3.41)$$

Odavde sledi da je impedansa otpornika,

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R, \quad (3.42)$$

realna i jednaka otpornosti otpornika. S obzirom da je impedansa otpornika realan pozitivan broj, njen argument je $\varphi = 0$. Fazna razlika napona i struje na otporniku jednaka je nuli, odnosno napon i struja na otporniku u fazi.

3.10.2. Impedansa kalema

Relacija koja povezuje napon i struju kalema u vremenskom domenu glasi $u(t) = L(di/dt)$. Kod preslikavanja iz vremenskog u kompleksni domen,

diferenciranje se preslikava u množenje sa $j\omega$. S obzirom da se množenje konstantnom preslikava u množenje istom konstantom, sledi da se relacija koja važi na kalemu preslikava u

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}, \quad (3.43)$$

u kompleksnom domenu. Odavde sledi da je kompleksna impedansa kalema jednaka

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L. \quad (3.44)$$

Njen moduo je $Z = \omega L$, a argument $\varphi = \pi/2$. Fazna razlika napona i struje na kalemu jednaka je $\pi/2$, odnosno napon na kalemu prednjači $\pi/2$ ispred struje kalema.

3.10.3. Impedansa kondenzatora

Relacija koja povezuje struju i napon kondenzatora u vremenskom domenu glasi $i(t) = C(du/dt)$. Kod preslikavanja iz vremenskog u kompleksni domen, diferenciranje se preslikava u množenje sa $j\omega$. S obzirom da se množenje konstantnom preslikava u množenje istom konstantom, sledi da se relacija koja važi na kondenzatoru preslikava u

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}, \quad (3.45)$$

u kompleksnom domenu. Odavde sledi da je kompleksna impedansa kondenzatora jednaka

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}. \quad (3.46)$$

Njen moduo je $Z = 1/(\omega C)$, a argument $\varphi = -\pi/2$. Fazna razlika napona i struje na kondenzatoru jednaka je $\varphi = -\pi/2$, odnosno napon na kondenzatoru kasni $\pi/2$ za strujom kondenzatora.

3.10.4. Kompleksna admitansa

Kompleksna admitansa prijemnika je recipročna vrednost kompleksne impedanse

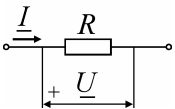
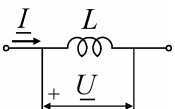
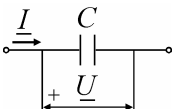
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad [\text{S}], \quad (3.47)$$

i jednaka je količniku kompleksne jačine struje i kompleksnog napona prijemnika. Jedinica za kompleksnu admitansu je simens (S). Termin kompleksna admitansa se često skraćuje u admitansa.

Argument kompleksne admitanse je $-\varphi$, a njen moduo je $Y = 1/Z$, gde je φ argument i Z moduo impedanse. U tabeli 3.5 su date kompleksne impedanse,

moduli impedansi, argumenti impedansi, kao i admitanse otpornika, kalema i kondenzatora.

Tabela 3.5. Kompleksne impedanse i admitanse otpornika, kalema i kondenzatora.

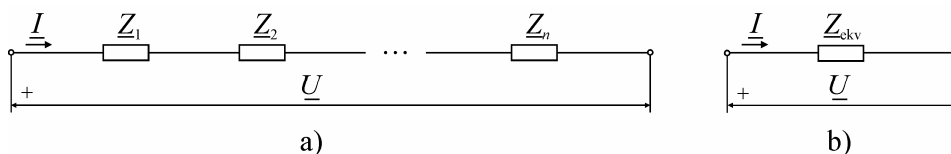
Element	Impedansa: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	Z	φ	Admitansa: $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$
	R	R	0	$G = \frac{1}{R}$
	$j\omega L$	ωL	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{j\omega L}$
	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$	$\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$	$j\omega C$

3.11. Redna, paralelna i mešovita veza impedansi

Slično kao i u kolima vremenski konstantnih struja, za dve mreže kažemo da su ekvivalentne ako imaju istu kompleksnu jačinu struje kroz priključke i isti kompleksni napon na priključcima.

3.11.1. Redna veza impedansi

U ovom odeljku ćemo odrediti ekvivalentnu impedansu redne veze impedansi. Posmatrajmo rednu vezu n impedansi prikazanu na slici 3.24.a. Celu ovu vezu želimo da zamenimo jednom impedansom, kao na slici 3.24.b.



Slika 3.24. a) Redna veza n impedansi i b) ekvivalentna impedansa.

Za ekvivalentnu impedansu sa slike 3.24.b veza između kompleksnog napona i kompleksne jačine struje data je izrazom

$$\underline{U} = \underline{Z}_{\text{ekv}} \underline{I}.$$

Da bismo odredili koliko je $\underline{Z}_{\text{ekv}}$ potrebna nam je veza između $\underline{U}$ i $\underline{I}$ redne veze impedansi prikazane na slici 3.24.a. Iz Drugog Kirhofovog zakona kompleksni napon redne veze impedansi jednak je zbiru napona na pojedinačnim impedansama. Kako je napon na impedansi $\underline{Z}_1$ jednak $\underline{Z}_1 \underline{I}$, na impedansi $\underline{Z}_2$ jednak $\underline{Z}_2 \underline{I}$, napon te redne veze jednak je

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \dots + \underline{Z}_n \underline{I}.$$

Izjednačavanjem desnih strana prethodnih izraza (s obzirom da su im leve strane jednake) dobija se

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} \underline{I} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \dots + \underline{Z}_n \underline{I}.$$

Nakon deljenja prethodne jednačine sa $\underline{I}$ dobija se ekvivalentna impedansa redne veze n impedansi

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n. \quad (3.48)$$

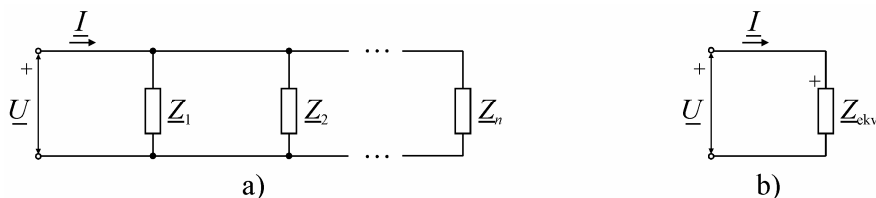
Kod redne veze impedansi moguć je jedan poseban slučaj, koji se ne može javiti kod vremenski konstantnih struja, a to je da ekvivalentna kompleksna impedansa redne veze može biti jednaka nuli, iako je svaka pojedinačna impedansa različita od nule. Kao najjednostavniji primer na kojem ćemo pokazati da je to moguće, posmatrajmo rednu vezu kalema induktivnosti L i kondenzatora kapacitivnosti C . Ekvivalentna impedansa ove redne veze jednaka je

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}.$$

U opštem slučaju ova ekvivalentna impedansa je različita od nule, ali u specijalnom slučaju kada je $\omega^2 LC = 1$, impedansa je jednaka nuli. Ova pojava naziva se rezonancija.

3.11.2. Paralelna veza impedansi

U ovom odeljku ćemo odrediti ekvivalentnu impedansu paralelne veze impedansi. Posmatrajmo paralelnu vezu n impedansi prikazanu na slici 3.25.a. Celu ovu vezu želimo da zamenimo jednom impedansom, kao na slici 3.25.b.



Slika 3.25. a) Paralelna veza n impedansi i b) ekvivalentna impedansa.

Za ekvivalentnu impedansu sa slike 3.25.b veza između kompleksne jačine struje i kompleksnog napona data je izrazom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{ekv}}}.$$

Da bismo odredili koliko je $\underline{Z}_{\text{ekv}}$ potrebna nam je veza između $\underline{U}$ i $\underline{I}$ paralelne veze impedansi prikazane na slici 3.25.a. Iz Prvog Kirhofovog zakona kompleksna jačina struje paralelne veze impedansi jednaka je zbiru kompleksnih jačina struja kroz pojedinačne impedanse. Kako je jačina struje kroz impedansu $\underline{Z}_1$ jednaka $\underline{U}/\underline{Z}_1$, kroz impedansu $\underline{Z}_2$ jednaka $\underline{U}/\underline{Z}_2$, ukupna jačina struje kroz paralelnu vezu jednaka je

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_n}.$$

Izjednačavanjem desnih strana prethodnih izraza (s obzirom da su im leve strane jednake) dobija se

$$\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{ekv}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_n}.$$

Nakon deljenja prethodne jednačine sa $\underline{U}$ dobija se ekvivalentna impedansa paralelne veze n impedansi

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ekv}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}. \quad (3.49)$$

Kada su samo dve impedanse vezane paralelno, iz izraza (3.49) za ekvivalentnu impedansu dobija se

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (3.50)$$

Kod paralelne veze impedansi takođe je moguć jedan poseban slučaj, koji se ne može javiti kod vremenski konstantnih struja, a to je da ekvivalentna kompleksna impedansa paralelne veze može biti beskonačna, iako je svaka pojedinačna impedansa konačna i različita od nule. Kao najjednostavniji primer na kojem ćemo pokazati da je to moguće, posmatrajmo paralelnu vezu kalem induktivnosti L i kondenzatora kapacitivnosti C . Ekvivalentna impedansa ove paralelne veze jednaka je

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

U opštem slučaju ova ekvivalentna impedansa je konačna, ali u specijalnom slučaju kada je $\omega^2 LC = 1$, impedansa je beskonačna. Ova pojava naziva se antirezonancija.

3.11.3. Mešovita veza impedansi

Pod mešovitom vezom impedansi podrazumeva se složena veza u kojoj, kao delovi, postoje i paralelne i redne veze. Ekvivalentna impedansa mešovite veze dobija se postepenim zamenjivanjem rednih i paralelnih veza ekvivalentnim impedansama.

3.12. Rezistansa i reaktansa

U opštem slučaju, ekvivalentna impedansa je kompleksan broj, čiji su i realan i imaginaran deo različiti od nule. Za svaku kompleksnu impedansu može da se odredi njen realan i imaginaran deo. Realan deo impedanse, $R = \text{Re}\{\underline{Z}\}$, naziva se rezistansa, dok se imaginaran deo impedanse, $X = \text{Im}\{\underline{Z}\}$, naziva reaktansa. Jedinica za reaktansu i rezistansu je om (Ω), ista kao i za impedansu.

Kao prvi primer razmotrimo rednu vezu otpornika otpornosti R i kalema induktivnosti L . Ekvivalentna impedansa ove redne veze je $\underline{Z} = R + j\omega L$, odakle se vidi da je rezistansa jednaka R , a reaktansa ωL .

Kao drugi primer razmotrimo paralelnu vezu otpornika otpornosti R i kalema induktivnosti L . Ekvivalentna impedansa ove paralelne veze je

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L \cdot (R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{\omega^2 L^2 R + j\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Rezistansa ove paralelne veze je

$$\text{Re}\{\underline{Z}\} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

dok je reaktansa

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} = \frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Ne treba mešati oznaku za rezistansu i oznaku za otpornost otpornika. Kod redne veze otpornika i kalema, rezistansa je jednaka otpornosti otpornika, dok je kod paralelne veze otpornika i kalema, izraz za rezistansu složen.

Kalem induktivnosti L ima pozitivnu reaktansu $X = \omega L$. Kondenzator kapacitivnosti C ima negativnu reaktansu $X = -1/(\omega C)$. Zato se ako je $X > 0$ za prijemnik kaže da ima induktivni karakter, a ako je $X < 0$ onda se kaže da ima kapacitivni karakter.

3.13. Snaga u prostoperiodičnom režimu

Snaga u kolima prostoperiodičnih struja i modernih prijemnika (potrošača) je veoma složena i o njoj je potrebno znati puno podataka.

Definišu se sledeće snage:

- trenutna,
- srednja (aktivna),
- reaktivna (jalova),
- kompleksna i
- prividna (nominalna, instalisana, raspoloživa).

Da bi se napravila izvesna razlika između navedenih snaga, uvedeni su posebni nazivi za jedinice za neke od ovih snaga. Jedinica za trenutnu i srednju snagu je vat (W), jedinica za reaktivnu snagu je volt-amper reaktivni (VAr ili var), a za kompleksnu i prividnu je volt-amper (VA).

3.13.1. Trenutna i srednja snaga prijemnika

Posmatrajmo prijemnik prikazan na slici 3.26.a. Trenutna snaga prijemnika se računa kao proizvod trenutnih vrednosti napona i jačine struje,

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (3.51)$$

Jedinica za trenutnu snagu je vat (W).

Vremenski oblici napona i jačine struje prijemnika su

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta), \\ i(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Fazna razlika između napona i struje je $\varphi = \theta - \psi$.

Trenutna snaga prijemnika, $p(t) = u(t)i(t)$, nakon uvrštavanja $u(t)$ i $i(t)$ izraz postaje

$$p(t) = 2UI \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \psi).$$

Primenom trigonometrijskog identiteta $2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$ prethodni izraz može da se napiše u obliku

$$p(t) = UI \cos(2\omega t + \theta + \psi) + UI \cos(\theta - \psi).$$

Prvi član u ovom izrazu je prostoperiodična funkcija učestanosti 2ω . Srednja vrednost tog člana jednaka je nuli (srednja vrednost svake prostoperiodične veličine jednaka je nuli). Drugi član, $UI \cos(\theta - \psi) = UI \cos \varphi$, gde je $\varphi = \theta - \psi$ fazna razlika između napona i struje, je konstantan i predstavlja srednju (aktivnu) snagu prijemnika koja se označava sa P ,

$$P = UI \cos \varphi. \quad (3.52)$$

Jedinica za srednju (aktivnu) snagu je vat (W), ista kao i trenutnu snagu.



Slika 3.26. Prijemnik a) u vremenskom domenu i b) u kompleksnom domenu.

3.13.2. Prividna snaga prijemnika

Prividna snaga prijemnika, S , definiše se kao proizvod efektivnih vrednosti napona i jačine struje

$$S = UI. \quad (3.53)$$

Ovaj proizvod jednak je srednjoj snazi samo ako je $\cos \varphi = 1$. U svim ostalim slučajevima aktivna snaga je manja od prividne, $P < S$. Zato se proizvod UI naziva prividna snaga.

Jedinica za prividnu snagu je volt-amper (VA). Kao i za vat, često se koriste veće jedinice kao na primer kVA ili MVA.

3.13.3. Faktor snage prijemnika

Na osnovu definicije prividne snage možemo pisati

$$P = S \cos \varphi. \quad (3.54)$$

Koeficijent $\cos \varphi$ naziva se faktor snage, $0 \leq \cos \varphi \leq 1$. Za čisto rezistivne prijemnike (kao što je na primer otpornik) faktor snage je maksimalan i jednak jedinici, $\cos \varphi = 1$. Za čisto reaktivne prijemnike (kao što su na primer kalem i kondenzator) faktor snage jednak je nuli, $\cos \varphi = 0$.

3.13.4. Reaktivna snaga prijemnika

Reaktivna snaga prijemnika, Q , definiše se kao

$$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi. \quad (3.55)$$

Jedinica za reaktivnu snagu je volt-amper reaktivni (VAr ili var). Često se koriste veće jedinice kao na primer kVAr ili MVAr.

Reaktivna snaga prijemnika opisuje periodičnu razmenu energije između prijemnika i ostalog dela mreže. Ovo razmenjivanje energije vrši se posredstvom struja u provodnicima koji napajaju prijemnik. Zbog ove komponente struje, u napojnom vodu javljaju se dodatni gubici (gubici zbog dovođenja energije prijemniku su neizbežni). Kada je reaktivna snaga jednaka nuli, onda ovih dodatnih

gubitaka nema. Dodatni gubici rastu kada se reaktivna snaga povećava. U praksi se teži da se ovi dodatni gubici smanje, što znači da se u praksi teži da se smanji reaktivna snaga. Smanjenje reaktivne snage se izvodi tako što se smanji $\sin \varphi$, što je ekvivalentno povećanju faktora snage $\cos \varphi$. O jednom postupku kojim se može povećati faktor snage biće reči kasnije u okviru ovog poglavlja.

3.13.5. Kompleksna snaga prijemnika

Definiše se još jedna snaga, i ona se naziva kompleksna snaga. To je kompleksan broj, čiji je realan deo jednak srednjoj snazi, a imaginaran deo reaktivnoj snazi

$$\underline{S} = P + jQ. \quad (3.56)$$

Jedinica za kompleksnu snagu je volt-amper (VA), ista kao i za prividnu snagu.

S obzirom da je $P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi$ i $Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi$, kompleksna snaga može da se napiše i u sledećim ekvivalentnim oblicima

$$\underline{S} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = S e^{j\varphi}. \quad (3.57)$$

Iz prethodnog izraza se vidi da je moduo kompleksne snage jednak prividnoj snazi. Argument kompleksne snage jednak je φ , faznoj razlici između napona i struje.

Kompleksna snaga može da se izrazi preko kompleksnog napona, $\underline{U} = U e^{j\theta}$ i kompleksne jačine struje $\underline{I} = I e^{j\psi}$ prijemnika. Ako kompleksnu jačinu struje konjugujemo, $\underline{I}^* = I e^{-j\psi}$, i pomnožimo sa kompleksnim naponom dobija se

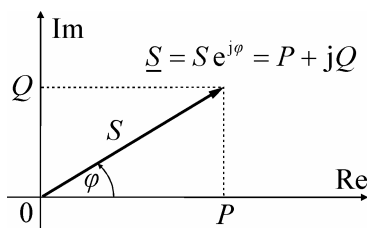
$$\underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\theta} \cdot I e^{-j\psi} = UI e^{j(\theta-\psi)} = UI e^{j\varphi} = S e^{j\varphi} = \underline{S}.$$

Prema tome, kompleksna snaga može da se odredi kao

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*, \quad (3.58)$$

gde $\underline{I}^*$ označava konjugovanu vrednost kompleksne struje $\underline{I}$.

S obzirom da je kompleksna snaga kompleksna veličina, može se grafički prikazati u kompleksnoj ravni. Dijagram na slici 3.27 naziva se trougao snaga.



Slika 3.27. Trougao snaga.

Pregled definisanih snaga i njihovih jedinica dat je u tabeli 3.6.

Tabela 3.6. Snage: nazivi, izrazi i jedinice.

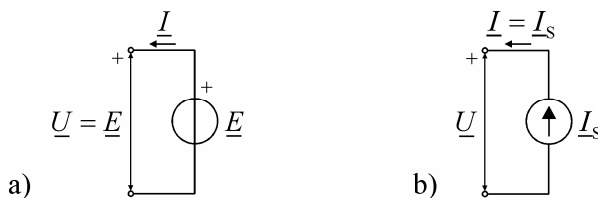
snaga	izraz	jedinica
trenutna	$p(t) = u(t)i(t)$	W
srednja (aktivna)	$P = UI \cos \varphi$	W
reaktivna (jalova)	$Q = UI \sin \varphi$	VA _r
kompleksna	$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ$	VA
prividna (nominalna)	$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$	VA

Kompleksna snaga prijemnika može da se napiše u još nekoliko oblika. Neka je $\underline{Z}$ kompleksna impedansa prijemnika. Tada se izraz za kompleksnu snagu prijemnika može napisati kao

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} |\underline{I}|^2 = \underline{Z} I^2. \quad (3.59)$$

3.13.6. Snage generatora

Za generatore, trenutna, srednja, prividna, reaktivna i kompleksna snaga, kao i faktor snage, računaju se po istim formulama kao i za prijemnik, samo u odnosu na referentne smerove napona i struje koji karakterišu generator (slika 3.28). Ako bi se referentni smer struje kroz idealan naponski generator promenio, izraz za kompleksnu snagu bi dobio negativan predznak.



Slika 3.28. a) Idealan naponski i b) idealan strujni generator.

Primer 3.7

Ako kroz prijemnik impedanse $\underline{Z} = (20 + j10)\Omega$ postoji kompleksna struja $\underline{I} = (4 + j3)\text{A}$, odrediti njegovu a) kompleksnu snagu, b) aktivnu snagu, c) reaktivnu snagu i d) prividnu snagu.

Rešenje.

Kompleksni napon prijemnika je $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = (20 + j10)(4 + j3) = (50 + j100) \text{ V}$.

a) $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = (50 + j100)(4 + j3)^* = (50 + j100)(4 - j3) = (500 + j250) \text{ VA}$,

b) $P = \text{Re}\{\underline{S}\} = 500 \text{ W}$,

c) $Q = \text{Im}\{\underline{S}\} = 250 \text{ Var}$,

d) $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{500^2 + 250^2} = 250\sqrt{5} = 559 \text{ VA}$.

3.14. Rešavanje složenih električnih kola u kompleksnom domenu

Složena kola prostoperiodične struje rešavaju se na analogan način kao i kola vremenski konstantnih struja, polazeći od Prvog i Drugog Kirhofovog zakona, kao i relacija između napona i jačine struje elemenata.

Jednačine za kola u prostoperiodičnom režimu pišu se u kompleksnom domenu i formalno imaju isti oblik kao jednačine za kola vremenski konstantnih struja, samo što su naponi i struje zamenjeni kompleksnim naponima i strujama, a otpornosti zamenjene kompleksnim impedansama.

Prvi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir kompleksnih struja grana koje se stiču u jednom čvoru jednak nuli. Matematička formulacija prvog Kirhofovog zakona glasi

$$\sum \underline{I} = 0. \quad (3.60)$$

Sa pozitivnim znakom se uzimaju struje koje izlaze iz čvora, dok se sa negativnim znakom uzimaju one koje ulaze u čvor.

Drugi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir kompleksnih napona duž ma koje zatvorene konture jednak nuli. Matematička formulacija Drugog Kirhofovog zakona glasi

$$\sum \underline{U} = 0. \quad (3.61)$$

Smer obilaska konture se bira između dva moguća smera. Pravilo o predznacima je isto kao i u slučaju vremenski konstantnih struja.

Posledica Drugog Kirhofovog zakona je da se napon između dve tačke u kolu može odrediti kao algebarski zbir napona na svim elementima duž proizvoljnog puta od prve do druge tačke.

Način formiranja jednačina po Prvom i Drugom Kirhofovom zakonu je isti kao i kod vremenski konstantnih struja. Za električno kolo sa n_c čvorova i n_g grana piše se $(n_c - 1)$ jednačina na osnovu Prvog Kirhofovog zakona i $n_g - (n_c - 1)$ jednačina na osnovu Drugog Kirhofovog zakona.

3.15. Teorema održanja snage

Teorema održanja snage za trenutne snage kaže da je zbir trenutnih snaga svih prijemnika u kolu jednak zbiru trenutnih snaga svih generatora u kolu. Teorema održanja snage za trenutne snage može da se iskaže kao

$$\sum p_p(t) = \sum p_g(t). \quad (3.62)$$

Teorema održanja snage važi i za kompleksne snage: zbir kompleksnih snaga svih prijemnika u kolu jednak je zbiru kompleksnih snaga svih generatora u kolu,

$$\sum \underline{S}_p = \sum \underline{S}_g. \quad (3.63)$$

Ako se kompleksna snaga napiše preko svog realnog i imaginarnog dela (aktivne i reaktivne snage), prethodna jednačina postaje

$$\sum (P_p + jQ_p) = \sum (P_g + jQ_g),$$

odnosno

$$\sum P_p + j\sum Q_p = \sum P_g + j\sum Q_g.$$

S obzirom da su dva kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im jednaki i realni i imaginarni delovi, iz prethodne jednačine sledi da je

$$\sum P_p = \sum P_g, \quad (3.64)$$

i

$$\sum Q_p = \sum Q_g. \quad (3.65)$$

Prema tome, teorema održanja snage važi i za aktivnu i za reaktivnu snagu.

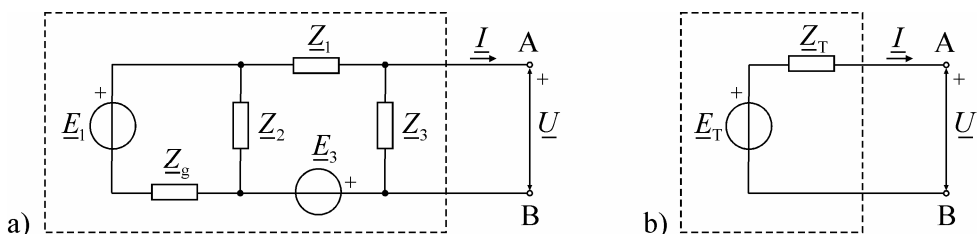
Međutim, teorema održanja snage ne važi za prividne snage.

3.16. Tevenenova teorema

Prema Tevenenovoj teoremi, svaka mreža se u odnosu na bilo koje svoje dve tačke ponaša kao realan naponski generator. Tevenenova teorema omogućava da se proizvoljna mreža sa dva priključka (slika 3.29.a) zameni ekvivalentnim realnim naponskim generatorom, koji se naziva Tevenenov generator (slika 3.29.b). Tevenenov generator sastoji se od idealnog naponskog generatora kompleksne elektromotorne sile $\underline{E}_T$ i redno vezane impedanse $\underline{Z}_T$.

Elektromotorna sila Tevenenovog generatora, jednaka je naponu između otvorenih priključaka A i B. Impedansa Tevenenovog generatora jednaka je impedansi između otvorenih priključaka A i B, kada se svi generatori uklone iz kola (naponski kratko spoje, a strujni otvore).

Kao i u slučaju vremenski konstantnih struja, Tevenenova teorema se koristi da bi se pojednostavilo rešavanje složenih kola, kao i za karakterizaciju složenih mreža u odnosu na svoje priključke.

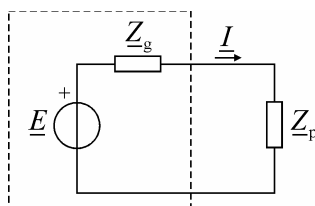


Slika 3.29. Primer primene Tevenenove teoreme a) originalna mreža sa dva priključka i b) Tevenenov generator.

3.17. Prilagođenje po snazi

Posmatrajmo realan naponski generator, kompleksne elektromotorne sile $\underline{E}$ i unutrašnje impedanse $\underline{Z}_g$. (Ovaj generator može biti i Tevenenov generator.) Neka je na generator priključen prijemnik impedanse $\underline{Z}_p$, kao na slici 3.30.

Cilj je da se odredi impedansa prijemnika $\underline{Z}_p$, tako da aktivna snaga prijemnika bude maksimalna moguća. Ovo može da se kaže i da je cilj da generator preda što veću snagu prijemniku.



Slika 3.30. Maksimalna aktivna snaga na prijemniku se dobija ako je $\underline{Z}_p = \underline{Z}_g^*$.

Impedanse generatora i prijemnika mogu da se napišu preko odgovarajućih rezistansi i reaktansi na sledeći način

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g,$$

i

$$\underline{Z}_p = R_p + jX_p.$$

Neka je kompleksna jačina struje u kolu na slici 3.30 jednaka $\underline{I}$. Kompleksna jačina struje se određuje iz $\underline{Z}_g \underline{I} + \underline{Z}_p \underline{I} - \underline{E} = 0$ i iznosi

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_p} = \frac{\underline{E}}{R_g + R_p + j(X_g + X_p)}.$$

Aktivna snaga prijemnika jednaka je

$$P_p = \operatorname{Re}\{\underline{S}_p\} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_p I^2\} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_p\} I^2 = R_p I^2,$$

gde je

$$I^2 = \underline{I} \underline{I}^* = \frac{E^2}{(R_g + R_p)^2 + (X_g + X_p)^2}.$$

Nakon kombinovanja prethodnih izraza, za aktivnu snagu prijemnika se dobija

$$P_p = E^2 \frac{R_p}{(R_g + R_p)^2 + (X_g + X_p)^2}.$$

Očigledno je da će aktivna snaga biti najveća, ako je $(X_g + X_p)^2$ najmanje, a to je za $X_g + X_p = 0$, odnosno

$$X_p = -X_g.$$

Kada je prethodni uslov ispunjen, izraz za aktivnu snagu prijemnika postaje

$$P_p = E^2 \frac{R_p}{(R_g + R_p)^2}.$$

Prethodni izraz je identičan izrazu za snagu potrošača u slučaju vremenski konstantnih struja. Tada je pokazano da izraz ima maksimum ako je

$$R_p = R_g.$$

Kombinovanjem $R_p = R_g$ i $X_p = -X_g$, dobija se da je snaga potrošača maksimalna ako je $\underline{Z}_p = R_p + jX_p = R_g - jX_g$, odnosno

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_g^*. \quad (3.66)$$

Jednačina (3.66) daje uslov prilagođenja po snazi. Kada je ovaj uslov ispunjen, aktivna snaga prijemnika je maksimalna i jednaka $P_p = E^2/(4R_g)$.

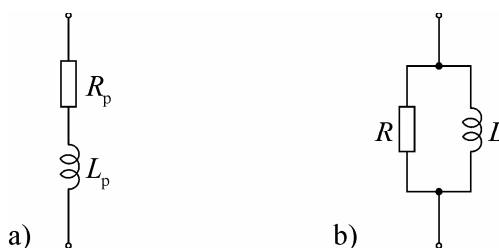
3.18. Popravka faktora snage

Popravka faktora snage je problem koji je specifičan za elektrodistributivne sisteme.

U praksi, prijemnici su retko samo aktivni ili reaktivni. Na primer, električni motor je prijemnik koji je aktivan (električna energija se pretvara u mehaničku) i reaktivan (zbog induktivnosti namotaja).

Za prijemnike velikih snaga teži se da se poveća faktor snage tako da postane blizak jedinici. Da bi se to postiglo dodaju se reaktivni elementi. Dodavanje reaktivnih elemenata da bi se povećao faktor snage naziva se popravka faktora snage. U idealnom slučaju faktor snage treba da bude jednak jedinici.

Veliki prijemnici često korišćeni u industriji su motori, koji su induktivni prijemnici. Takav prijemnik u električnom kolu može da se predstavi rednom vezom otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p , kao na slici 3.31.a. Impedansa ovog prijemnika jednaka je $\underline{Z}_p = R_p + j\omega L_p$. Međutim uobičajeno je da se takav prijemnik prikaže kao paralelna veza otpornika i kalema, kao na slici 3.31.b.



**Slika 3.31. Ekvivalentne veze pretežno induktivnog prijemnika
a) redna veza i b) paralelna veza otpornika i kalema.**

S obzirom da ekvivalentne impedanse (a samim tim i admitanse) obe veze moraju biti jednake, iz tog uslova mogu da se odrede otpornost R i induktivnost L , na slici 3.31.b. Ekvivalentna admitansa sa slike 3.31.a jednaka je

$$\underline{Y}_{\text{ekv}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ekv}}} = \frac{1}{R_p + j\omega L_p} = \frac{R_p - j\omega L_p}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} = \frac{R_p}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} - j \frac{\omega L_p}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2}.$$

Ekvivalentna admitansa sa slike 3.31.b jednaka je

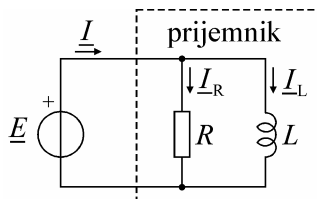
$$\underline{Y}_{\text{ekv}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ekv}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}.$$

Ove admitanse moraju biti jednake, što znači da su jednaki i realni i imaginarni delovi. Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova u prethodna dva izraza dobija se da otpornost R i induktivnost L sa slike 3.31.b iznose

$$R = \frac{R_p^2 + \omega^2 L_p^2}{R_p}, \quad L = \frac{R_p^2 + \omega^2 L_p^2}{\omega^2 L_p}.$$

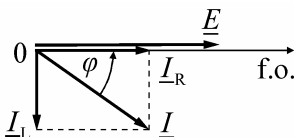
Na prethodno opisan način bilo koji induktivni prijemnik može da se prikaže kao paralelna veza otpornika i kalema.

Prema tome, uprošćena šema veze induktivnog prijemnika na generator može da se predstavi ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 3.32.



Slika 3.32. Induktivni prijemnik priključen na generator.

Fazorski dijagram napona i struja prijemnika prikazan je na slici 3.33. Fazor napona nacrtan je horizontalno, što odgovara izboru da je početna faza napona jednaka nuli, $\theta = 0$. Kompleksna jačina struje $\underline{I}_R$ kroz otpornik je u fazi sa naponom, dok kompleksna jačina struje $\underline{I}_L$ kroz kalem fazno kasni za naponom $\underline{U}$ za ugao $\pi/2$. Na osnovu Prvog Kirhofovog zakona, kompleksna jačina struje kroz generator jednaka je $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L$. Sa slike 3.33 može da se uoči da kompleksni napon $\underline{U}$ i kompleksna struja $\underline{I}$ nisu u fazi, već da struja fazno kasni za ugao φ u odnosu na napon.



Slika 3.33. Fazorski dijagram napona i struje induktivnog prijemnika.

Aktivna snaga prijemnika jednaka je $P_p = UI \cos \varphi$, gde su U i I efektivne vrednosti kompleksnog napona $\underline{U}$ i kompleksne struje $\underline{I}$, dok je reaktivna snaga $Q_p = UI \sin \varphi$. S obzirom da gubici rastu sa povećanjem reaktivne snage, teži se da se smanji fazna razlika φ , a time smanji reaktivna snaga i poveća aktivna snaga.

Idealna situacija je da je $\varphi = 0$, u kom slučaju je faktor snage jednak jedinici, $\cos \varphi = 1$.

Faktor snage ekvivalentnog prijemnika popravljja se na jedinicu dodavanjem reaktivnog elementa (kondenzatora) paralelno sa prijemnikom, kao što je prikazano na slici 3.34. Kapacitivnost kondenzatora se bira tako da bude

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = 0.$$

Taj uslov će biti ispunjen ako je impedansa paralelne veze kalema i kondenzatora beskonačna (antirezonancija), odnosno ako je

$$1 - \omega^2 LC = 0.$$

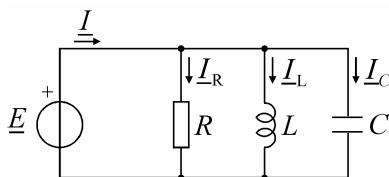
Iz prethodnog izraza dobija se kapacitivnost kondenzatora

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Zamenom induktivnosti L izražene preko induktivnosti prijemnika L_p i otpornosti prijemnika R_p u prethodni izraz dobija se

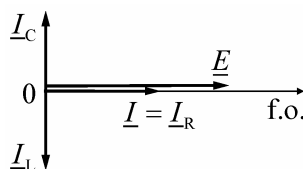
$$C = \frac{L_p}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2}.$$

Na opisan način je postignuta potpuna popravka snage, jer je faktor snage popravljen na vrednost jedan.



Slika 3.34. Popravka faktora snage paralelno vezanim kondenzatorom.

Fazorski dijagram napona i struja nakon popravka faktora snage prikazan je na slici 3.35.



Slika 3.35. Fazorski dijagram napona i struja nakon popravka faktora snage.

U praksi se često pribegava i delimičnoj popravci faktora snage.

Popravka faktora snage je veoma važna sa aspekta potrošača, jer potrošač koristi samo aktivnu (srednju) snagu, a plaća prividnu snagu. Iz $P = S \cos \varphi$ sledi

$$S = \frac{P}{\cos \varphi}.$$

Prethodni izraz pokazuje da je, za istu aktivnu snagu, prividna snaga manja (a samim tim i troškovi) ako je faktor snage $\cos \varphi$ veći.

Primer 3.8

Ako je otpornost prijemnika $R_p = 15 \Omega$, a induktivnost $L_p = 0,8 \text{ H}$, odrediti kapacitivnost kondenzatora za popravku faktora snage. Frekvencija mreže je 50 Hz .

Rešenje.

$$C = \frac{L_p}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} = \frac{0,8}{15^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0,8)^2} = 12,6 \mu\text{F}.$$

3.19. Pregled jednačina

Kružna frekvencija: $\omega = 2\pi f$.

Perioda: $T = 1/f$.

Trenutna vrednost prostoperiodične veličine: $u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \theta)$.

Efektivna vrednost prostoperiodične veličine: $U = U_m / \sqrt{2} = 0,71 U_m$.

Kompleksni predstavnik: $\underline{U} = U e^{j\theta}$.

Prvi Kirhofov zakon u kompleksnom obliku: $\sum \underline{I} = 0$.

Drugi Kirhofov zakon u kompleksnom obliku: $\sum \underline{U} = 0$.

Impedansa: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$.

Impedansa otpornika: $\underline{Z}_R = R$.

Impedansa kalema: $\underline{Z}_L = j\omega L$.

Impedansa kondenzatora: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$.

Redna veza impedansi: $\underline{Z}_{\text{ekv}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n$.

Paralelna veza impedansi: $\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ekv}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}$.

Paralelna veza dve impedanse: $\underline{Z}_{\text{ekv}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$.

Srednja (aktivna) snaga: $P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi$.

Reaktivna snaga: $Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi$.

Kompleksna snaga: $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ = S e^{j\varphi}$.

Prividna snaga: $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Faktor snage: $\cos \varphi$.