

2. *Vremenski konstantne struje*

2.1. *Električna struja*

Sa električnom strujom se srećemo svakodnevno. Hidroelektrane i termoelektrane isporučuju električnu struju korisnicima. Sijalice, kompjuteri i kućni aparati ne rade ako nema električne struje. Nervni impulsi su još jedan primer električne struje.

Organizovano kretanje naelektrisanja se naziva električna struja.

Haotično kretanje naelektrisanja ne stvara električnu struju. To je zbog toga što haotično kretanje ne stvara pomeranje naelektrisanja ni u jednom određenom pravcu.

Nosioci naelektrisanja se mogu organizovano kretati u čvrstim telima, tečnostima, gasovima i vakuumu. U provodnicima postoje naelektrisane čestice koje se mogu kretati u materijalu (slobodni nosioci naelektrisanja). Kod dobrih metala (srebro, bakar, aluminijum) elektroni iz spoljašnje ljuske lako napuštaju matične atome i mogu se kretati kroz provodno telo. Električna struja u provodnicima nastaje pod dejstvom električnog polja koje postoji u provodniku.

Pod žicom se podrazumeva provodno telo cilindričnog oblika, čije su dimenzije poprečnog preseka znatno manje od dužine. U elektrotehnici su od posebnog interesa tanke metalne žičane strukture, koje su nazvane električna kola. Drugi deo ovog odeljka posvećen je analizi električnih kola.

2.2. *Jačina struje*

Jedna od veličina koja se koristi za opisivanje električne struje je jačina (intenzitet) električne struje. Jačina električne struje je mera brzine usmerenog kretanja naelektrisanja. U elektrotehnici je uobičajeno da se izostavlja reč električne, pa se kaže samo jačina struje ili intenzitet struje.

U ovom delu kursa ćemo posmatrati struje koje se ne menjaju u funkciji vremena, odnosno vremenski konstantne (stacionarne, stalne) struje. Promenljive struje će biti predmet analize kasnije u okviru ovog kursa.

Jačina struje u provodniku može da se odredi deljenjem ukupne protekle količine naelektrisanja, koja prođe kroz posmatrani poprečni presek, sa vremenom koje je za to potrebno. S obzirom da je jedinica za naelektrisanje kulon (C), a za vreme sekund (s), jedinica za jačinu struje je C/s. Ovoj jedinici je dato posebno ime, amper (A). Relacija koja povezuje jačinu struje, naelektrisanje i vreme može da se izrazi na sledeće načine

$$I = \frac{Q}{t} \quad [\text{A}], \quad (2.1)$$

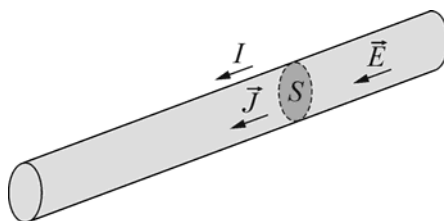
ili

$$Q = It \quad [\text{C}]. \quad (2.2)$$

Za opisivanje električne struje, osim jačine struje, koristi se i vektor gustine struje. Jačina struje u provodniku je proporcionalna količini naelektrisanja koja prođe kroz poprečni presek provodnika. Vektor gustine struje, $\vec{J}$, je vektor čiji je intenzitet jednak količniku iz jačine struje i površine poprečnog preseka

$$J = \frac{I}{S} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]. \quad (2.3)$$

Vektor gustine struje i vektor jačine električnog polja u provodniku su vektori istog pravca i smera (slika 2.1).



Slika 2.1. Vektor jačine električnog polja i vektor gustine struje u provodniku.

Primer 2.1

Količina naelektrisanja $Q = 35 \text{ mC}$ prođe između dva poprečna preseka u provodniku za vreme $t = 20 \text{ ms}$. Odrediti jačinu struje u ovom provodniku.

Rešenje.

Zadato je $Q = 35 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ i $t = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Jačina struje u provodniku jednaka je

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{35 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} = 1,75 \text{ A}.$$

Primer 2.2

Ako kroz provodnik postoji struja jačine $120 \mu\text{A}$ u trajanju od 15 s , odrediti proteklu količinu naelektrisanja.

Rešenje.

Zadato je $I = 120 \mu\text{A} = 120 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ i $t = 15 \text{ s}$.

Protekla količina naelektrisanja je

$$Q = It = 120 \cdot 10^{-6} \cdot 15 = 1800 \cdot 10^{-6} = 1,8 \cdot 10^{-3} = 1,8 \text{ mC}.$$

Primer 2.3

U bakarnom provodniku kružnog poprečnog preseka, prečnika $d = 2\text{ mm}$, uspostavljena je vremenski konstantna struja jačine $I = 15\text{ A}$. Izračunati gustinu struje u provodniku.

Rešenje.

Zadato je $I = 15\text{ A}$ i $d = 2\text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3}\text{ m}$.

Gustina struje može da se odrediti na osnovu izraza (2.3), $J = I/S$, gde je S površina poprečnog preseka provodnika koja iznosi

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 = \pi \cdot 10^{-6}\text{ m}^2.$$

Gustina struje u provodniku jednaka je

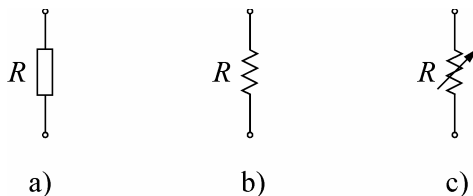
$$J = \frac{I}{S} = \frac{15}{\pi \cdot 10^{-6}} = 4,88 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}.$$

Ovo je veoma velika vrednost gustine struje. Ova vrednost je bliska najvećoj gustini struje koja duže vreme može da postoji u bakarnom provodniku, a da u njemu ne dođe do oštećenja.

2.3. Otpornost

Svaki materijal se suprotstavlja električnoj struji. Mera ovog suprotstavljanja naziva se otpornost i jedinica je om (Ω). Provodnici, koji imaju mnogo slobodnih elektrona, imaju malu otpornost. Sa druge strane, izolatori koji imaju mali broj slobodnih elektrona, imaju veliku otpornost. Čisti poluprovodnici, u pogledu otpornosti, se obično ponašaju više kao izolatori, nego kao provodnici. Zato se u praksi, u poluprovodnike dodaju nečistoće da bi se smanjila njihova otpornost.

Električna komponenta koja je dizajnirana tako da ima unapred zadatu otpornost se naziva otpornik. Grafički simboli za otpornik su prikazani na slikama 2.2.a, b i c. Često je uloga otpornika da ograniči jačinu struje i tako spreči da pregori generator ili neki drugi potrošač, kroz koji postoji struja.



Slika 2.2. Grafički simboli za otpornik.

Otpornost uzorka od nekog materijala zavisi od četiri faktora

1. dužine uzorka,

2. površine poprečnog preseka,
3. vrste materijala i
4. temperature.

Eksperimentima može da se pokaže da je otpornost uzorka od nekog materijala direktno proporcionalna dužini i inverzno proporcionalna površini poprečnog preseka. Kombinacija ovih izjava može da se napiše u obliku

$$R \sim \frac{l}{S},$$

gde je l dužina uzorka (u metrima) i S površina poprečnog preseka (izražena u metrima na kvadrat).

Konstanta proporcionalnosti u ovom slučaju se odnosi na vrstu materijala i nazvana je specifična otpornost materijala. Ona je definisana kao otpornost koja postoji između naspramnih strana kocke, od tog materijala, čije su stranice dužine 1m. Oznaka za specifičnu otpornost je ρ , a jedinica je om-metar (Ωm). Prema tome, otpornost nekog tela može da se odredi iz izraza

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [\Omega]. \quad (2.4)$$

Iz izraza (2.4) se vidi da otpornost tela zavisi od njegovog oblika i dimenzija, kao i od vrste materijala od kog je napravljeno. Za razliku od otpornosti, specifična otpornost je karakteristika materijala i ne zavisi od oblika, niti od veličine tela.

Opseg vrednosti otpornosti je veoma širok. Neki keramički izolatorski materijali, kao oni koji se koriste na dalekovodima, imaju otpornost reda $T\Omega$. Otpornost čoveka je reda veličine $k\Omega$.

Primer 2.4

Žica od bakra dužine 200 m i površine poprečnog preseka $0,8\text{mm}^2$ ima specifičnu otpornost od $0,02\mu\Omega\text{m}$. Odrediti otpornost ove žice.

Rešenje.

Zadato je $l = 200\text{m}$, $S = 0,8 \cdot 10^{-6}\text{m}^2$ i $\rho = 0,02 \cdot 10^{-6}\Omega\text{m}$.

Otpornost žice iznosi

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{0,02 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{0,8 \cdot 10^{-6}} = 5\Omega.$$

Primer 2.5

Otpornik je napravljen od 250 metara duge bakarne žice prečnika 0,5mm. Specifična otpornost žice $0,018\mu\Omega\text{m}$. Izračunati otpornost ovog otpornika.

Rešenje.

Zadato je $l = 250 \text{ m}$, $d = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ i $\rho = 0,018 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$.

Površina poprečnog preseka žice je jednaka je

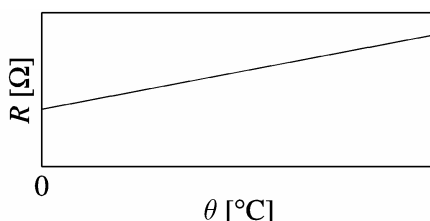
$$S = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \frac{(0,5 \cdot 10^{-3})^2}{4} \pi = 0,1963 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Otpornost otpornika iznosi

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{0,018 \cdot 10^{-6} \cdot 250}{0,1963 \cdot 10^{-6}} = 22,9 \Omega.$$

2.3.1. Promena otpornosti sa temperaturom

Otpornost materijala takođe zavisi i od temperature, i izražava se preko temperaturnog koeficijenta, specifičnog za taj materijal. Otpornost metala se povećava sa porastom temperature. Otpornost grafita, izolatora, poluprovodnika i elektrolita se smanjuje sa porastom temperature. Iz ovih razloga se kaže da metali imaju pozitivan temperaturni koeficijent. Za izolatore i ostale materijale se kaže da imaju negativan temperaturni koeficijent. Sa umerenom promenom temperature, promena otpornosti provodnika je relativno mala i može da se aproksimira pravom linijom, kao što je to ilustrovano na slici 2.3.



Slika 2.3. Promena otpornosti provodnika sa temperaturom.

Temperaturni koeficijent materijala se definiše kao mera promene otpornosti po stepenu temperature u odnosu na otpornost na nekoj specifičnoj temperaturi. Simbol koji se koristi za temperaturni koeficijent je α , a jedinica je $1/^\circ\text{C}$, gde $^\circ\text{C}$ označava stepen Celzijusa. Za referentnu temperaturu se obično uzima ili 0°C ili 20°C , i otpornost na ovoj temperaturi se označava sa R_0 . Otpornost na temperaturi $\theta [^\circ\text{C}]$ može da se odredi iz

$$R = R_0 (1 + \alpha (\theta - \theta_0)), \quad (2.5)$$

gde je R_0 vrednost otpornosti na temperaturi θ_0 (obično 0°C ili 20°C).

Promena otpornosti sa temperaturom se koristi za konstrukciju nekih termometara. Međutim, promena otpornosti sa temperaturom je najčešće nepoželjna.

U tabeli 2.1 date su specifične otpornosti i temperaturni koeficijenti za neke materijale na 20°C .

Tabela 2.1. Specifične otpornosti i temperaturni koeficijenti nekih materijala na 20°C.

Materijal	Specifična otpornost $\rho[\Omega\text{m}]$	Temperaturni koeficijent $\alpha[1/^{\circ}\text{C}]$
Srebro	$1,59 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Bakar	$1,68 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Aluminijum	$2,82 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Živa	$98 \cdot 10^{-8}$	$0,9 \cdot 10^{-3}$
Grafit	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$-0,5 \cdot 10^{-3}$
Čisti silicijum	640	$-75 \cdot 10^{-3}$
Staklo	$10^{10} - 10^{14}$	–
Teflon	$10^{22} - 10^{24}$	–

Primer 2.6

Otpornost žice od bakra na temperaturi od 20°C iznosi 350Ω. Temperaturni koeficijent bakra jednak je $3,9 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$. Odrediti otpornost žice na temperaturi od 60°C.

Rešenje.

Zadato je $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$, $R_0 = 350\Omega$, $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$ i $\theta = 60^{\circ}\text{C}$.

Otpornost žice na temperaturi $\theta = 60^{\circ}\text{C}$ određuje se iz $R = R_0(1 + \alpha(\theta - \theta_0))$, gde je $\theta_0 = 20^{\circ}$ i $\theta = 60^{\circ}\text{C}$. Otpornost žice na 60°C iznosi

$$R = 350(1 + 3,9 \cdot 10^{-3}(60 - 20)) = 350(1 + 0,156) = 404,6\Omega.$$

Primer 2.7

Otpornost otpornika napravljenog od grafita jednaka je 120Ω na temperaturi od 20°C. Kada se otpornik priključi u kolo, njegova temperatura poraste na 32°C. Temperaturni koeficijent grafita jednak je $-0,5 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$.

Rešenje.

Zadato je $R_0 = 120\Omega$, $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$, $\alpha = -0,5 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$ i $\theta = 32^{\circ}\text{C}$.

Otpornost na temperaturi $\theta = 32^{\circ}\text{C}$ određuje se iz $R = R_0(1 + \alpha(\theta - \theta_0))$, gde je R_0 otpornost na temperaturi od $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$. Otpornost otpornika na temperaturi $\theta = 32^{\circ}\text{C}$ iznosi

$$R = 120(1 - 0,5 \cdot 10^{-3}(32 - 20)) = 120(1 - 0,006) = 119,28\Omega.$$

2.3.2. Savršeni provodnici

Specifična otpornost nekih materijala (npr. olovo, živa, neke legure) praktično pada na nulu pri temperaturama bliskim apsolutnoj nuli (nekoliko stepeni

Kelvinove skale). Takvi materijali se nazivaju superprovodnicima. Koriste se u konstrukciji jakih elektromagneta, na primer kod skenera u medicinskoj dijagnostici ili vozova na magnetskom jastuku.

Za potrebe teorijske analize uvodi se pojam savršenog provodnika. Kod takvog provodnika specifična otpornost jednaka je nuli, pa je samim tim i otpornost jednaka nuli. U tehničkoj praksi česti su provodnici u obliku žica. U analizi kola takve žice se smatraju savršeno provodnim.

2.4. Omov zakon

Kada postoji struja kroz otpornik, na otporniku će postojati napon. Podsetimo se da se napon meri u voltima (V).

Omov zakon kaže da je napon između krajeva otpornika direktno proporcionalan jačini struje kroz njega, pod uslovom da su ostali činioci (kao na primer temperatura) konstantni. Ovo može da se napiše u matematičkom obliku na sledeći način

$$U \sim I.$$

Za dobijanje jednačine od prethodnog izraza potrebna je konstanta proporcionalnosti. Ta konstanta je otpornost otpornika. Omov zakon u matematičkom obliku može da se napiše na sledeće načine

$$U = RI \quad [\text{V}], \quad (2.6)$$

ili

$$I = \frac{U}{R} \quad [\text{A}], \quad (2.7)$$

ili

$$R = \frac{U}{I} \quad [\Omega]. \quad (2.8)$$

Kada kroz otpornik postoji jačina struje I kaže se da na otporniku postoji pad napona koji je jednak $U = RI$. Znak “+” na slici 2.4 označava onaj kraj otpornika koji se nalazi na višem potencijalu. To je kraj otpornika u koji struja “ulazi”.



Slika 2.4 Uz Omov zakon.

Primer 2.8

Odrediti napon između krajeva otpornika otpornosti $33\text{ k}\Omega$, ako kroz otpornik postoji struja jačine $5,5\text{ mA}$.

Rešenje.

Zadato je $R = 33 \text{ k}\Omega = 33 \cdot 10^3 \Omega$ i $I = 5,5 \text{ mA} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.

Napon na otporniku je

$$U = IR = 5,5 \cdot 10^{-3} \cdot 33 \cdot 10^3 = 181,5 \text{ V}.$$

Primer 2.9

Napon na otporniku otpornosti 15Ω jednak je 24 V . Odrediti jačinu struje kroz otpornik.

Rešenje.

Zadato je $U = 24 \text{ V}$ i $R = 15 \Omega$.

Jačina struje kroz otpornik je

$$I = \frac{U}{R} = \frac{24}{15} = 1,6 \text{ A}.$$

2.5. Džulov zakon

Dva najznačajnija efekta koji prate električnu struju su zagrevanje provodnika (Džulov efekat) i pojava magnetskog polja. O magnetskom polju će biti reči u narednom odeljku.

Energija je sposobnost sistema da izvrši neki rad. Na osnovu zakona održanja energije, energija se ne može ni stvoriti ni uništiti. Kad god se izvrši rad, energija se transformiše iz jednog oblika u drugi. Najčešći oblik u koji se energija transformiše je toplota. Jedan od efekata električne struje je da ona prouzrokuje toplotu. Ovaj efekat se naziva Džulov efekat, po naučniku koji ga je otkrio. Eksperimentalno je utvrđeno da je količina toplote koju stvara električna struja direktno proporcionalna kvadratu jačine struje i vremenu za koje ona protiče. Konstanta proporcionalnosti je još jednom otpornost otpornika. Prema tome količina toplote (odnosno disipirane energije) data je sledećom jednačinom

$$W = I^2 R t \quad [\text{J}].$$

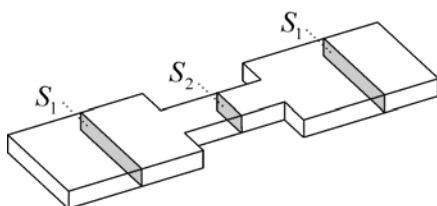
S obzirom na relacije (Omov zakon) koje povezuju napon, jačinu struje i otpornost otpornika, izraz za energiju disipiranu na otporniku može da se napiše u tri ekvivalentna oblika

$$W = I^2 R t = \frac{U^2 t}{R} = U I t \quad [\text{J}]. \quad (2.9)$$

Energija disipirana na otporniku naziva se energija Džulovih gubitaka.

U mnogim situacijama zagrevanje provodnika je nepoželjno. Ipak, u nekim tehničkim primenama glavna svrha vezivanja otpornika u kolo jeste odavanje toplote (kod električnih grejača). U drugim primenama otpornik se greje da bi se postigli svetlosni efekti (sijalice sa užarenim vlaknom).

Primer gde se koristi Džulova pojava je i topljivi osigurač. Na slici 2.5 ilustrovan je model topljivog osigurača. Na suženom mestu provodnika otpornost je veća, zbog čega su na tom delu i gubici veći, što dovodi do povećanog oslobađanja toplote na tom delu provodnika. Usled prekomernog zagrevanja taj deo provodnika se topi i tako prekida put struje.



Slika 2.5. Na mestu gde je provodnik sužen dolazi do jačeg zagrevanja.

Primer 2.10

Jačina struje od 200mA teče 5 minuta kroz otpornik otpornosti 750Ω. Odrediti a) napon na otporniku i b) energiju koja se u otporniku pretvorila u toplotu.

Rešenje.

Zadato je $I = 250\text{mA} = 0,2\text{A}$, $t = 5 \cdot 60\text{s} = 300\text{s}$ i $R = 750\Omega$.

a) Napon na otporniku određuje se iz Omovog zakona,

$$U = RI = 0,2 \cdot 750 = 150\text{V}.$$

b) Energija koja se u otporniku pretvorila u toplotu određuje se iz Džulovog zakona,

$$W = I^2 R t = (0,2)^2 \cdot 750 \cdot 300 = 9000\text{J} = 9\text{kJ}.$$

2.6. Snaga Džulovih gubitaka

Snaga je brzina kojom se vrši rad, ili brzina kojom se energija transformiše iz jednog oblika u drugi. Jedinica za snagu je vat (W). Snaga može da se odredi iz sledećeg izraza

$$P = \frac{W}{t} \quad [\text{W}]. \quad (2.10)$$

Prema tome, deljenjem jednačina (2.9) sa t , dobija se da snaga disipirana na otporniku može da se napiše u tri ekvivalentna oblika

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = UI \quad [\text{W}]. \quad (2.11)$$

Snaga disipirana na otporniku naziva se snaga Džulovih gubitaka ili samo Džulovi gubici.

Snaga je veličina koju u svakodnevnom životu povezujemo sa električnom strujom, na primer kada upoređujemo grejna tela ili sijalice, prema njihovoj snazi. U električnom kolu, ova tela se analiziraju kao otpornici. Na primer sijalica snage 25 W pri naponu od 230 V, potrošiće za isto vreme manje električne energije od sijalice od 60 W.

Primer 2.11

Na otporniku otpornosti 640Ω disipira se snaga od 0,1 W. Odrediti a) napon na otporniku i b) jačinu struje kroz otpornik.

Rešenje.

Zadato je $R = 640\Omega$ i $P = 0,1$ W.

a) Iz $P = U^2/R$ sledi $U^2 = PR$ i napon na otporniku jednak je

$$U = \sqrt{PR} = \sqrt{0,1 \cdot 640} = 8 \text{ V.}$$

b) Iz $P = I^2 R$ sledi $I^2 = P/R$ i jačina struje kroz otpornik je

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0,1}{640}} = \sqrt{\frac{1}{6400}} = \frac{1}{80} = 12,5 \cdot 10^{-3} = 12,5 \text{ mA.}$$

Rezultati pod a) i b) mogu da se provere s obzirom da je $P = UI$ i $P = 0,1$ W (na osnovu teksta zadatka) na sledeći način: $P = UI = 8 \cdot 12,5 \cdot 10^{-3} = 0,1$ W.

Primer 2.12

Struja jačine 1,4 A za vreme od 15 minuta na otporniku disipira energiju od 200 kJ. Odrediti a) napon na otporniku, b) disipiranu snagu i c) otpornost otpornika.

Rešenje.

Zadato je $I = 1,4$ A, $t = 15 \cdot 60 \text{ s} = 900 \text{ s}$ i $W = 200 \text{ kJ} = 200 \cdot 10^3 \text{ J}$.

a) Iz $W = UI t$ dobija se napon na otporniku

$$U = \frac{W}{It} = \frac{200 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 900} = 158,7 \text{ V.}$$

b) Disipirana snaga na otporniku jednaka je

$$P = \frac{W}{t} = 222,2 \text{ W.}$$

c) Iz $W = I^2 R t$ dobija se otpornost otpornika

$$R = \frac{W}{I^2 t} = \frac{200 \cdot 10^3}{(1,4)^2 \cdot 900} = 113,4 \Omega.$$

2.7. Komercijalna jedinica za energiju

Jedinica za energiju u SI sistemu jedinica je previše mala za neke praktične potrebe kada se koristi velika snaga u nekom dužem vremenskom intervalu. Ako se, na primer, grejač od 3 kW koristi 12 sati, energija koju će potrošiti iznosi

$$W = Pt = 3 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot (12 \cdot 60 \cdot 60) \text{ s} = 129,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 129,6 \text{ MJ}.$$

Zato se kao komercijalna jedinica za električnu energiju koristi kilovat-čas (kWh). Da bi se dobila energija izražena u kWh, potrebno je snagu izraziti u kW i pomnožiti sa vremenskim intervalom izraženim u časovima (h). Već spomenuti grejač potrošio bi

$$W = Pt = 3 \text{ kW} \cdot 12 \text{ h} = 36 \text{ kWh}$$

energije. Veza između kWh i džula je

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}.$$

Električno brojilo meri utrošenu energiju izraženu u kWh.

Primer 2.13

Grejač vašeg bojlera snage 2 kW je radio 10 dana po 5 sati dnevno. Ako kWh električne energije staje 5 dinara, koliko ćete platiti za utrošenu energiju?

Rešenje.

Zadato je $P = 2 \text{ kW}$ i $t = 10 \cdot 5 \text{ h} = 50 \text{ h}$. S obzirom da je snaga izražena u kW, a vremenski interval u časovima, primenom izraza $W = Pt$ dobija se energija izražena u kWh,

$$W = 2 \text{ kW} \cdot 50 \text{ h} = 100 \text{ kWh}.$$

Cena utrošene električne energije je $100 \cdot 5 = 500$ dinara.

2.8. Idealan naponski generator

Do sada smo smatrali da na slobodne nosioce naelektrisanja deluje samo električna sila, koja je posledica električnog polja u provodniku.

Za održavanje vremenski konstantne struje u provodniku, neophodno je prisustvo stranih sila koje mogu pomeriti nosioce naelektrisanja u smeru suprotnom od smera delovanja električnih sila. Od posebnog tehničkog značaja su sile koje deluju u generatorima, koji se još nazivaju i izvorima električne energije ili izvorima napajanja. U generatorima se hemijska energija (nagomilana u generatoru), mehanička energija (energija vodenog toka ili vodene pare) ili svetlosna energija (od Sunčevog zračenja) pretvara u električnu energiju. Generator pri tome izvrši rad protiv električne sile na račun nekog drugog rada ili energije, u zavisnosti od konstrukcije generatora. Generator je naprava koja može da prenese

slobodna naelektrisanja u smeru suprotnom od smera delovanja električne sile. Bez generatora ne bi mogla postojati struja.

Sa tačke gledišta primene generatora i analize električnih kola, nije važna priroda stranih sila koje deluju na nosioce naelektrisanja u generatorima. Važno je ponašanje generatora u odnose na svoje priključke. U tom smislu, veličine koje se koriste za opisivanje generatora su elektromotorna sila i unutrašnja otpornost.

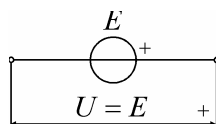
Elektromotorna sila je veličina koja kvantitativno opisuje delovanje stranih sila u generatoru i predstavlja karakteristiku generatora. Ona je “pokretačka” sila u električnom kolu.

Generator kod kojeg se delovanje stranih sila opisuje elektromotornom silom naziva se naponski generator. Ako je unutrašnja otpornost naponskog generatora jednaka nuli, tada se generator naziva idealan naponski generator. Grafički simboli koji se koriste za idealan naponski generator prikazani su na slici 2.6. Oznaka koja se koristi za elektromotornu silu je E .



Slika 2.6. Grafički simboli za idealan naponski generator.

Napon između krajeva idealnog naponskog generatora je uvek isti i jednak njegovoj elektromotornoj sili (slika 2.7). Očigledno je da je jedinica za elektromotornu silu volt (V). Napon idealnog naponskog generatora ne zavisi od jačine struje kroz njega.



Slika 2.7. Napon između krajeva idealnog naponskog generatora jednak je njegovoj elektromotornoj sili.

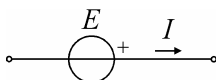
2.8.1. Snaga idealnog naponskog generatora

Snaga generatora je brzina kojom generator predaje energiju ostatku kola.

Snaga idealnog naponskog generatora jednaka je proizvodu njegove elektromotne sile i jačine struje kroz generator

$$P_E = EI. \quad (2.12)$$

Ova relacija važi pod pretpostavkom da je smer struje takav da struja “izlazi” iz pozitivne elektrode generatora, kao na slici 2.8.



Slika 2.8. Ako je smer struje takav da struja “izlazi” iz pozitivne elektrode generatora snaga idealnog naponskog generatora određuje se kao $P_E = EI$.

U slučaju kada je smer struje suprotan od onog označenog na slici 2.8, snaga naponskog generatora je

$$P_E = -EI. \quad (2.13)$$

Snaga generatora može biti pozitivna ili negativna. Pozitivna snaga znači da generator predaje energiju kolu. Negativna snaga generatora znači da se generator ponaša kao potrošač. Na primer, tokom punjenja akumulator se ponaša kao potrošač, a tokom pražnjenja ponaša se kao generator.

2.9. Prosto električno kolo

Primer prostog električnog kola je baterijska lampa. To kolo se sastoji od baterije, sijalice i provodnika koji povezuju bateriju i sijalicu, kao što je to ilustrovano na slici 2.9.a.

Umesto da se crtaju detaljne konstrukcije generatora, potrošača i provodnika za vezu, u analizi električnih kola se koriste pojednostavljeni simboli za prikaz kola, koji se naziva električna šema. Na toj šemi je svaki element označen svojim grafičkim simbolom.

Na slici 2.9.b prikazana je električna šema baterijske lampe. U kolima vremenski konstantnih struja, najvažnija karakteristika potrošača je njegova otpornost. Zato se potrošač, u ovom primeru sijalica, na šematskom prikazu predstavlja kao otpornik.

Smatra se da su provodnici kojima su povezani elementi kratki spojevi (da nemaju otpornost). I da njihov oblik i dimenzija nisu važni. Zbog toga je napon na sijalici jednak naponu baterije.



Slika 2.9. a) Prosto električno kolo koje se sastoji od sijalice, baterije i provodnika za povezivanje i b) šematski prikaz ovog istog električnog kola.

U prostom električnom kolu, jačina struje je ista u celom kolu, odnosno jačina struja kroz generator jednaka je jačini struje kroz prijemnik. U prostom kolu nema grananja.

Primer 2.14

Sijalica je priključena na bateriju čija je elektromotorna sila jednaka 3 V. Jačina struje kroz sijalicu je 0,2 A. Odrediti a) otpornost sijalice i b) snagu sijalice.

Rešenje.

Zadato je $E = 3 \text{ V}$ i $I = 0,2 \text{ A}$.

a) Napon na sijalici (otporniku) jednak je elektromotornoj sili baterije, $U = 3 \text{ V}$. Otpornost sijalice može da se odredi iz Omovog zakona

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3}{0,2} = 15 \Omega.$$

b) Snaga sijalice jednaka je proizvodu napona na sijalici i jačine struje kroz nju,

$$P = UI = 3 \cdot 0,2 = 0,6 \text{ W}.$$

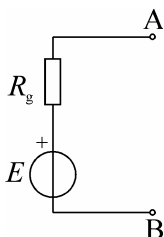
2.10. Realan naponski generator

Do sada je razmatran idealan naponski generator elektromotorne sile E za koji važi da je napon između njegovih krajeva jednak elektromotornoj sili bez obzira na jačinu struje kroz njega. Međutim to nije slučaj u praksi. Kao primer razmotrimo bateriju. Baterije se prave od određenog broja ploča koje su potopljene u elektrolit. Ploče i elektrolit daju malu, ali ipak konačnu otpornost, koja predstavlja unutrašnju otpornost baterije. Prema tome, realan naponski generator ima unutrašnju otpornost.

Realan naponski generator se modeluje kao redna veza idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E i unutrašnje otpornosti R_g . Na slici 2.10 je prikazan realan naponski generator sa otvorenim krajevima (nije priključen u kolo). S obzirom da su krajevi ovog realnog naponskog generatora otvoreni, struje kroz generator nema i na unutrašnjoj otpornosti generatora R_g neće biti napona. Zato je napon između priključaka A i B jednak elektromotornoj sili generatora,

$$U_{AB} = E. \quad (2.14)$$

Elektromotorna sila generatora se meri na njegovim otvorenim priključcima.



Slika 2.10. Realan naponski generator sa otvorenim krajevima.

Kada se realan naponski generator priključi na potrošač, kao na slici 2.11, kroz njega se uspostavlja struja. Pretpostavimo da je jačina struje kroz kolo I . Tada je snaga generatora $P_E = EI$, snaga Džulovih gubitaka na unutrašnjoj otpornosti generatora $P_{R_g} = R_g I^2$ i snaga Džulovih gubitaka na potrošaču $P_R = RI^2$. Po zakonu održanja energije, snaga generatora mora biti jednaka ukupnoj snazi Džulovih gubitaka, $EI = R_g I^2 + RI^2$. Deljenjem prethodnog izraza sa I dobija se $E = R_g I + RI$, odnosno

$$RI = E - R_g I. \quad (2.15)$$

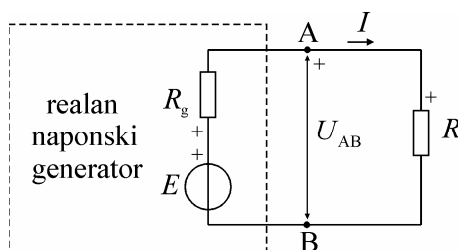
Napon na potrošaču U_{AB} , na osnovu Omovog zakona jednak je

$$U_{AB} = RI. \quad (2.16)$$

Kombinovanjem izraza (2.15) i (2.16) dobija se napon između priključaka realnog naponskog generatora,

$$U_{AB} = E - R_g I. \quad (2.17)$$

Kada se na realan naponski generator priključi potrošač, napon na priključcima generatora više neće biti jednak elektromotornoj sili, već će biti manji za vrednost napona na unutrašnjoj otpornosti generatora.

Slika 2.11. Realan naponski generator priključen na potrošač otpornosti R .

Primer 2.15

Realan naponski generator elektromotorne sile 12V i unutrašnje otpornosti $0,1\Omega$ vezan je na potrošač otpornosti R , kao na slici 2.11. Jačina struje u kolu jednaka je 0,5A. Odrediti a) napon između priključaka A i B realnog naponskog generatora i b) otpornost potrošača.

Rešenje.

Zadato je $E = 12 \text{ V}$, $R_g = 0,1 \Omega$ i $I = 0,5 \text{ A}$.

a) Napon između priključaka realnog naponskog generatora je

$$U_{AB} = E - R_g I = 12 - 0,1 \cdot 0,5 = 11,95 \text{ V}.$$

b) Napon U_{AB} može da se izrazi preko otpornosti potrošača i jačine struje kroz potrošač na sledeći način

$$U_{AB} = RI,$$

odakle sledi da je otpornost potrošača

$$R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{11,95}{0,5} = 23,9 \Omega.$$

U ovom primeru unutrašnja otpornost generatora je mala i može se zanemariti.

Primer 2.16

Realan naponski generator elektromotorne sile 6 V i unutrašnje otpornosti $0,15 \Omega$ vezan je na potrošač otpornosti R , kao na slici 2.11. Jačina struje u kolu jednaka je $0,2 \text{ A}$. Odrediti a) napon između priključaka A i B realnog naponskog generatora i b) otpornost potrošača.

Rešenje.

Zadato je $E = 6 \text{ V}$, $R_g = 0,15 \Omega$ i $I = 0,2 \text{ A}$.

a) $U_{AB} = E - R_g I = 6 - 0,15 \cdot 0,2 = 5,97 \text{ V}$.

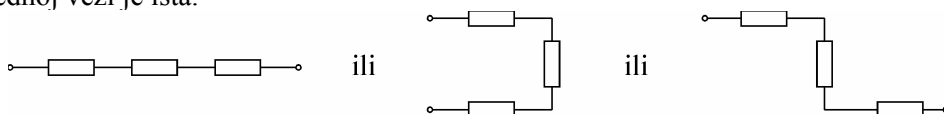
b) Iz $U_{AB} = RI$ dobija se otpornost potrošača

$$R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{5,97}{0,2} = 29,85 \Omega.$$

2.11. Redna, paralelna i mešovita veza otpornika

2.11.1. Redna veza otpornika

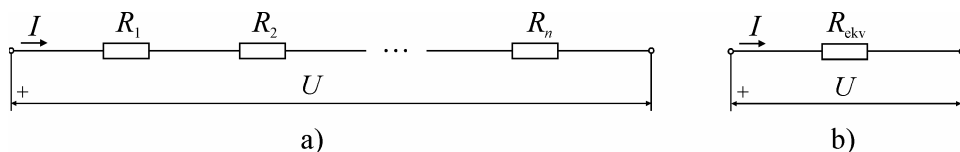
Kada su otpornici vezani u nizu, kaže se da su otpornici vezani na red. Primeri redne veze tri otpornika prikazani su na slici 2.12. Jačina struje kroz otpornike u rednoj vezi je ista.



Slika 2.12. Primeri redne veze tri otpornika.

Pretpostavimo rednu vezu n otpornika i neka je napon na celoj grupi otpornika jednak U , kao na slici 2.13.a. Ideja je da se cela grupa otpornika zameni

jednim ekvivalentnim otpornikom kao na slici 2.13.b, koji će se u odnosu na svoje priključke “ponašati” isto kao i cela grupa redno vezanih otpornika. Jačina struje kroz ekvivalentni otpornik mora biti ista kao i jačina struje kroz grupu redno vezanih otpornika. Napon na ekvivalentnom otporniku mora biti isti kao napon na celoj grupi redno vezanih otpornika. Potražimo otpornost ekvivalentnog otpornika.



Slika 2.13. a) Redna veza n otpornika i b) ekvivalentan otpornik.

Snaga Džulovih gubitaka ekvivalentnog otpornika, $R_{\text{ekv}} I^2$, mora biti jednaka zbiru snaga Džulovih gubitaka svih otpornika,

$$R_{\text{ekv}} I^2 = R_1 I^2 + R_2 I^2 + \dots + R_n I^2. \quad (2.18)$$

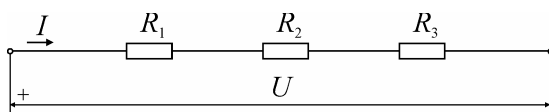
Deljenjem prethodnog izraza sa I^2 dobija se ekvivalentna otpornost redne veze otpornika

$$R_{\text{ekv}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (2.19)$$

Za otpornike koji su vezani na red, ekvivalentna otpornost određuje se sabiranjem otpornosti redno vezanih otpornika.

Primer 2.17

Za kolo prikazano na slici 2.14 odrediti a) ekvivalentnu otpornost između priključaka, b) jačinu struje kroz otpornike, c) napon na svakom otporniku i d) ukupnu snagu disipiranu na otpornicima (ukupnu snagu Džulovih gubitaka). Brojni podaci su $U = 24 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ i $R_3 = 300 \Omega$.



Slika 2.14. uz primer 2.17.

Rešenje.

a) $R_{\text{ekv}} = R_1 + R_2 + R_3 = 100 \Omega + 200 \Omega + 300 \Omega = 600 \Omega$.

b) $I = U / R_{\text{ekv}} = 24 / 600 = 40 \text{ mA}$.

c) Na osnovu Omovog zakona, napon na otporniku otpornosti R_1 jednak je $U_1 = R_1 I = 100 \cdot 0,04 = 4 \text{ V}$. Analogno, naponi na otpornicima R_2 i R_3 su $U_2 = R_2 I = 8 \text{ V}$ i $U_3 = R_3 I = 12 \text{ V}$.

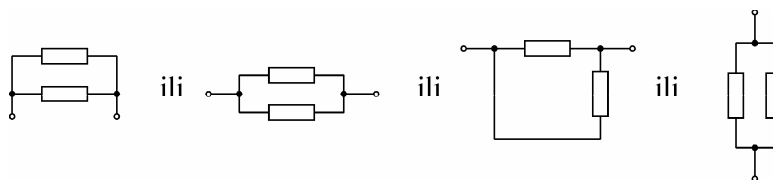
d) Snage disipirane na otpornicima su $P_{R1} = R_1 I^2 = 100 \cdot (0,04)^2 = 0,16 \text{ W}$, analogno $P_{R2} = R_2 I^2 = 0,32 \text{ W}$ i $P_{R3} = R_3 I^2 = 0,48 \text{ W}$. Snaga disipirana na celoj grupi otpornika jednaka je zbiru snaga disipiranih na otpornicima,

$$P_J = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 0,96 \text{ W}.$$

Ta snaga može da se odredi i na drugi način, kao snaga koja bi se disipirala na ekvivalentnom otporniku, $P_J = R_{\text{ekv}} I^2 = 600 \cdot (0,04)^2 = 0,96 \text{ W}$.

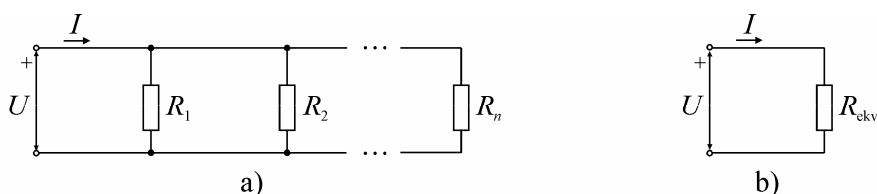
2.11.2. Paralelna veza otpornika

Primeri paralelne veze dva otpornika prikazani su na slici 2.15. Može da se uoči da su priključci jednog otpornika povezani sa odgovarajućim priključcima drugog otpornika. Napon na otpornicima u paralelnoj vezi je isti.



Slika 2.15. Primeri paralelne veze dva otpornika.

Pretpostavimo paralelnu vezu n otpornika i neka je napon na ovoj vezi otpornika jednak U , kao na slici 2.16.a. Ideja je ista kao i u slučaju redne veze, a to je da se cela grupa otpornika zameni jednim ekvivalentnim otpornikom kao na slici 2.16.b, koji će se u odnosu na svoje priključke “ponašati” isto kao i cela grupa paralelno vezanih otpornika. Jačina struje kroz ekvivalentni otpornik mora biti ista kao i jačina struje kroz grupu paralelno vezanih otpornika. Napon na ekvivalentnom otporniku mora biti isti kao napon na celoj grupi paralelno vezanih otpornika. Potražimo otpornost ekvivalentnog otpornika.



Slika 2.16. a) Paralelna veza n otpornika i b) ekvivalentan otpornik.

Svi otpornici su vezani direktno na napon U , tako da je napon na svim otpornicima isti i jednak U . Snaga Džulovih gubitaka ekvivalentnog otpornika, U^2/R_{ekv} , mora biti jednaka zbiru snaga Džulovih gubitaka svih otpornika

$$\frac{U^2}{R_{\text{ekv}}} = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} + \dots + \frac{U^2}{R_n}. \quad (2.20)$$

Deljenjem prethodnog izraza sa U^2 dobija se

$$\frac{1}{R_{\text{ekv}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (2.21)$$

Prethodna jednačina ne daje ekvivalentnu otpornost kola, već ekvivalentnu provodnost G_{ekv} , koja se meri u simensima (S). Provodnost je recipročna vrednost otpornosti, tako da se ekvivalentna otpornost R_{ekv} dobija kao recipročna vrednost prethodnog izraza.

Kada su samo dva otpornika vezana paralelno, iz izraza (2.21) za ekvivalentnu otpornost dobija se

$$R_{\text{ekv}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.22)$$

Na osnovu izraza (2.21), ekvivalentna otpornost paralelne veze k otpornika iste otpornosti R , iznosi R/k .

Primer 2.18

Otpornici otpornosti $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ i $R_3 = 30\Omega$ su vezani a) redno, a zatim b) paralelno. Odredite ekvivalentnu otpornost za svaku od veza.

Rešenje.

a) Ekvivalentna otpornost redne veze otpornika iznosi

$$R_{\text{ekv}} = R_1 + R_2 + R_3 = 10\Omega + 20\Omega + 30\Omega = 60\Omega.$$

b) Ekvivalentna otpornost paralelne veze otpornika se određuje iz

$$\frac{1}{R_{\text{ekv}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{30\Omega} = \frac{11}{60\Omega},$$

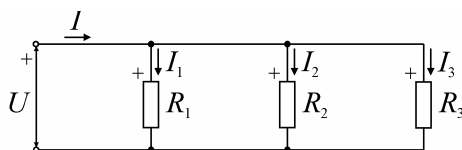
odakle sledi

$$R_{\text{ekv}} = \frac{60}{11}\Omega = 5,46\Omega.$$

Kod paralelne veze otpornika, ekvivalentna otpornost je manja od najmanje pojedinačne otpornosti.

Primer 2.19

Za kolo prikazano na slici 2.17 odrediti a) ekvivalentnu otpornost kola, b) jačine struja kroz otpornike i c) jačinu struje I . Brojni podaci su $U = 24\text{V}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$ i $R_3 = 300\Omega$.



Slika 2.17. uz primer 2.19.

Rešenje.

a) Polazeći od izraza (2.21) dobija se

$$\frac{1}{R_{\text{ekv}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{200\Omega} + \frac{1}{300\Omega} = \frac{11}{600\Omega},$$

odakle sledi da je ekvivalentna otpornost kola

$$R_{\text{ekv}} = \frac{600}{11}\Omega.$$

b) Jačine struja u granama kola su

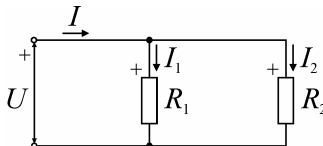
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{24}{100} = 0,24 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = 0,12 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3} = 0,08 \text{ A}.$$

c) Jačina struje I može da se odredi iz napona U i ekvivalentne otpornosti kola R_{ekv} ,

$$I = \frac{U}{R_{\text{ekv}}} = \frac{24 \cdot 11}{600} = 0,44 \text{ A}.$$

Primer 2.20

Za kolo prikazano na slici 2.18 odrediti a) ekvivalentnu otpornost kola, b) jačine struja kroz otpornike i c) jačinu struje I . Brojni podaci su $U = 12 \text{ V}$, $R_1 = 6\Omega$ i $R_2 = 3\Omega$.



Slika 2.18. uz primer 2.20.

Rešenje.

a) Polazeći od izraza (2.22) za ekvivalentna otpornost kola dobija se

$$R_{\text{ekv}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2\Omega.$$

b) Jačine struja u granama kola su

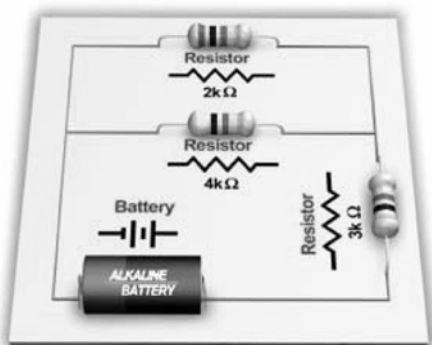
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A}.$$

c) Jačina struje I može da se odredi iz napona U i ekvivalentne otpornosti kola R_{ekv} ,

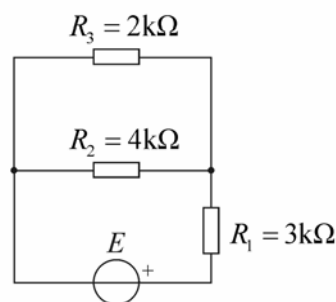
$$I = \frac{U}{R_{\text{ekv}}} = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}.$$

2.11.3. Mešovita veza otpornika

Pod mešovitom vezom otpornika podrazumeva se složena veza u kojoj, kao delovi, postoje i paralelne i redne veze. Primer mešovite veze otpornika povezane na bateriju prikazan je na slici 2.19.



a)



b)

Slika 2.19. a) Mešovita veza otpornika povezana na bateriju, i
b) šematski prikaz ovog istog električnog kola.

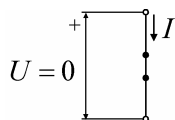
Otpornost mešovite veze dobija se postepenim zamenjivanjem rednih i paralelnih veza ekvivalentnim otpornostima.

Ekvivalentna otpornost grupe otpornika prikazane na slici 2.19 iznosi

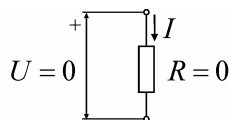
$$R_{\text{ekv}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1.$$

2.12. Kratak spoj

Kratak spoj je element čiji je napon jednak nuli, bez obzira na jačinu struje (slika 2.20.a). Kratak spoj može da se zamisli kao otpornik otpornosti $R = 0$. Njegov napon jednak je nuli, bez obzira na jačinu struje kroz njega (slika 2.20.b).



a)

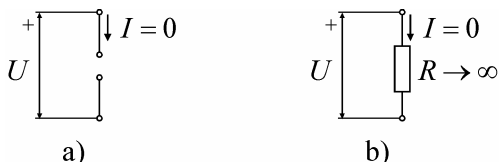


b)

Slika 2.20. a) Kratak spoj i b) otpornik otpornosti $R = 0$ kao ekvivalentni element.

2.13. Otvorena veza

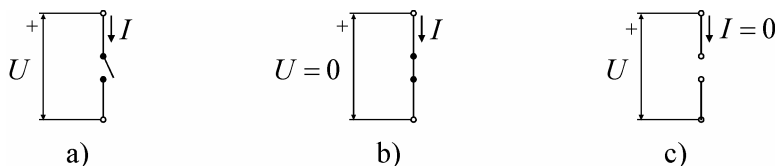
Otvorena veza je element čija jačina struje je jednaka nuli, bez obzira na napon (slika 2.21.a). Otvorena veza može da se zamisli kao otpornik otpornosti $R \rightarrow \infty$. Njegova jačina struje jednaka je nuli, bez obzira na napon (slika 2.21.b).



Slika 2.21. a) Otvorena veza i b) otpornik otpornosti $R \rightarrow \infty$ kao ekvivalentni element.

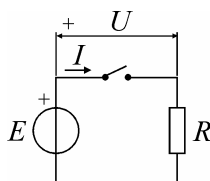
2.14. Prekidač

Prekidač (slika 2.22.a) je element koji ima dva stanja: može biti zatvoren (slika 2.22.b) ili otvoren (slika 2.22.c). Kada je prekidač zatvoren (slika 2.22.b) ponaša se kao kratak spoj. Kada je prekidač otvoren (slika 2.22.c) ponaša se kao otvorena veza.



Slika 2.22. a) Prekidač b) ekvivalentna šema zatvorenog prekidača i c) ekvivalentna šema otvorenog prekidača.

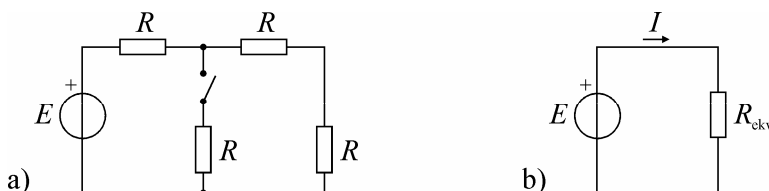
Kao primer primene prekidača razmotrimo kolo prikazano na slici 2.23. Kada je prekidač zatvoren tada je $U = 0$ i $I = E/R$. Kada je prekidač otvoren, tada je $I = 0$ i $U = E$.



Slika 2.23. Primer kola sa prekidačem.

Primer 2.21

U kolu prikazanom na slici 2.24.a odrediti struju kroz generator a) pre i b) posle zatvaranja prekidača. Elektromotorna sila generatora iznosi $E = 9 \text{ V}$. Svi otpornici imaju istu otpornost $R = 10 \Omega$.



Slika 2.24. uz primer 2.21.

Rešenje.

Grupa otpornika može da se zameni ekvivalentnim otpornikom, kao na slici 2.24.b. Jačina struje kroz generator određuje se kao $I = E/R_{ekv}$.

a) Pre zatvaranja prekidača, $R_{ekv} = 3R = 30 \Omega$. Jačina struje kroz generator je $I = E/R_{ekv} = 0,3 A$.

b) Posle zatvaranja prekidača, ekvivalentna otpornost mešovite veze otpornika jednaka je

$$R_{ekv} = R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{5R}{3} = 16,66 \Omega.$$

Jačina struje kroz generator je $I = E/R_{ekv} = 0,54 A$.

2.15. Električna kola

U električnom kolu može postojati više izvora (generatora) i više potrošača.

U kolima vremenski konstantnih struja potrošač se modeluje kao otpornost. Kola vremenski konstantnih struja sastoje se od generatora, otpornika i provodnika za povezivanje.

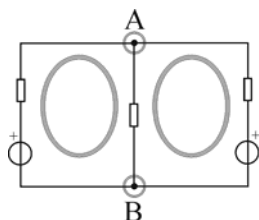
Na slici 2.25 je prikazan primer električnog kola, na kojem će biti objašnjeni pojmovi kao što su čvor, grana i kontura.

Smatra se da su provodnici kojima su povezani elementi idealni kratki spojevi (da nemaju otpornost). Napon između dve tačke koje spaja provodnik za povezivanje jednak je nuli, bez obzira na jačinu struje u provodniku. Oblik i dužina provodnika za povezivanje nisu važni.

Tačke spajanja tri ili više provodnika nazivaju se čvorovima. Kolo prikazano na slici 2.25 ima dva čvora: čvor A i čvor B. Čvorovi se na šemama označavaju punim kružićima. Smer struje u provodnicima može biti u čvor ili iz čvora.

Deo kola koji neposredno spaja dva čvora naziva se grana. Kolo prikazano na slici 2.25 ima tri grane.

Grane kola obrazuju zatvorene putanje koje se nazivaju konture. U kolu prikazanom na slici 2.25 označene su dve konture.



Slika 2.25. Električno kolo sa dva čvora i tri grane.

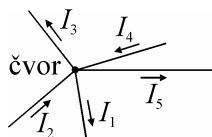
2.16. Prvi Kirhofov zakon

Iz zakona održanja naelektrisanja sledi da je suma jačina struja koje ulaze u čvor jednaka sumi jačina struja koje izlaze iz čvora (nema nagomilavanja naelektrisanja). Ova izjava može da se preformuliše u Prvi Kirhofov zakon koji kaže da je algebarski zbir struja u čvoru uvek jednak nuli. Matematička formulacija prvog Kirhofovog zakona glasi

$$\sum I = 0, \quad (2.23)$$

gde simbol Σ označava “suma od”. Sa pozitivnim znakom se uzimaju struje koje izlaze iz čvora, dok se sa negativnim znakom uzimaju one koje ulaze u čvor.

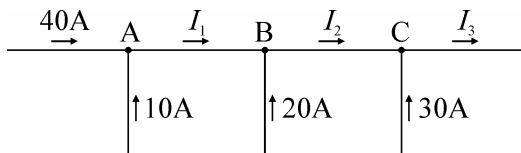
Na slici 2.26 je prikazan primer čvora u kojem se spaja pet provodnika. Primenićemo Prvi Kirhofov zakon na ovaj čvor. Tri struje izlaze iz čvora (I_1 , I_3 i I_5) i one se pišu sa pozitivnim predznakom, dok struje I_2 i I_4 ulaze u čvor i one se pišu sa negativnim predznakom. Prvi Kirhofov zakon primenjen na čvor prikazan na slici 2.26 glasi $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$.



Slika 2.26. Primer čvora u kojem se spaja pet provodnika.

Primer 2.22

Za kolo prikazano na slici 2.27 odrediti nepoznate jačine struja.



Slika 2.27. uz primer 2.22.

Rešenje.

Čvor A: $I_1 - 40\text{ A} - 10\text{ A} = 0$ odakle sledi $I_1 = 40\text{ A} + 10\text{ A} = 50\text{ A}$.

Čvor B: $I_2 - I_1 - 20\text{ A} = 0$ odakle sledi $I_2 = I_1 + 20\text{ A} = 50\text{ A} + 20\text{ A} = 70\text{ A}$.

Čvor C: $I_3 - I_2 - 30\text{ A} = 0$ odakle sledi $I_3 = I_2 + 30\text{ A} = 70\text{ A} + 30\text{ A} = 100\text{ A}$.

2.17. Drugi Kirhofov zakon

Drugi Kirhofov zakon sledi iz zakona održanja energije. Drugi Kirhofov zakon kaže da je algebarski zbir napona duž ma koje zatvorene konture jednak nuli. Matematička formulacija Drugog Kirhofovog zakona glasi

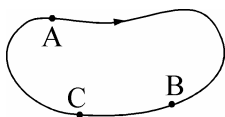
$$\sum U = 0. \quad (2.24)$$

Smer obilaska konture se bira između dva moguća smera. Ukoliko se prilikom obilaska konture, u izabranom smeru, prvo naiđe na kraj elementa označen sa + (kraj elementa na višem potencijalu), napon na tom elementu uzima se sa pozitivnim predznakom. U suprotnom napon na tom elementu uzima se sa negativnim predznakom.

Na slici 2.28 je prikazan primer zatvorene konture. Napon U_{AB} može da se izrazi preko razlike potencijala tačaka A i B, $U_{AB} = V_A - V_B$. Analogno, $U_{BC} = V_B - V_C$ i $U_{CA} = V_C - V_A$. Suma napona U_{AB} , U_{BC} i U_{CA} jednaka je nuli, jer

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_A) = 0.$$

Primenićemo Drugi Kirhofov zakon na konturu prikazanu na slici 2.28. Za označen smer obilaska konture, polazeći od tačke A, iz drugog Kirhofovog zakona dobija se $U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = 0$. Za obrnut smer obilaska konture dobija se $U_{AC} + U_{CB} + U_{BA} = 0$. S obzirom da je $U_{AC} = -U_{CA}$, $U_{CB} = -U_{BC}$ i $U_{BA} = -U_{AB}$ druga jednačina dobija se iz prve kada se ova pomnoži sa -1 . Zbog toga, smer obilaska konture može proizvoljno da se izabere između dva moguća smera.

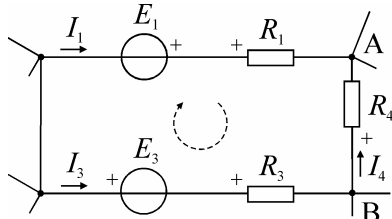


Slika 2.28. Uz primenu Drugog Kirhofovog zakona.

Na slici 2.29 prikazan je primer zatvorene konture, koja je deo nekog većeg električnog kola. Izabrana orijentacija konture je u smeru kretanja kazaljke na časovniku. Orijentacija konture označena je isprekidanom linijom sa strelicom. Prilikom sumiranja napona, kontura se obilazi u izabranom smeru, polazeći od proizvoljne tačke i vraćajući se u tu tačku. Za označen smer obilaska konture, polazeći od tačke A, iz drugog Kirhofovog zakona dobija se jednačina

$$-R_4 I_4 - R_3 I_3 - E_3 - E_1 + R_1 I_1 = 0.$$

Pri analizi kola smatra se da su provodnici za vezu savršeni. Zato u zbiru figurišu samo naponi otpornika i generatora.



Slika 2.29. Primer zatvorene konture.

2.17.1. Određivanje napona između dve tačke

Posledica Drugog Kirhofovog zakona je da se napon između dve tačke u kolu može odrediti kao algebarski zbir napona svih elemenata duž proizvoljnog puta od prve do druge tačke. Pri tome napon elementa ulazi u zbir sa predznakom plus ako se prvo nađe na kraj elementa koji je označen sa +, a sa predznakom minus ako to nije slučaj. Pravilo o predznacima je isto kao i za jednačine po Drugom Kirhofovom zakonu.

Za primer prikazan na slici 2.29, napon između tačaka A i B može da se odredi kao $U_{AB} = -R_4 I_4$ ili $U_{AB} = -R_1 I_1 + E_1 - E_3 + R_3 I_3$.

2.18. Analiza električnih kola

Pod “rešavanjem” električnog kola podrazumeva se određivanje struja grana i napona grana.

Osnovne jednačine za analizu i rešavanje električnih kola su Prvi i Drugi Kirhofov zakon.

Za svako električno kolo, po Prvom Kirhofovom zakonu (I KZ) moguće je napisati onoliko jednačina, koliko ima čvorova. Označimo ukupan broj čvorova sa n_ϵ . Međutim, broj nezavisnih jednačina je za jedan manji od broja čvorova. Dakle, za električno kolo sa n_ϵ čvorova može da se napiše $(n_\epsilon - 1)$ nezavisnih jednačina na osnovu Prvog Kirhofovog zakona.

Ako električno kolo ima n_ϵ čvorova i n_g grana, broj nezavisnih jednačina koje mogu da se napišu na osnovu Drugog Kirhofovog zakona (II KZ) jednak je $n_g - (n_\epsilon - 1)$.

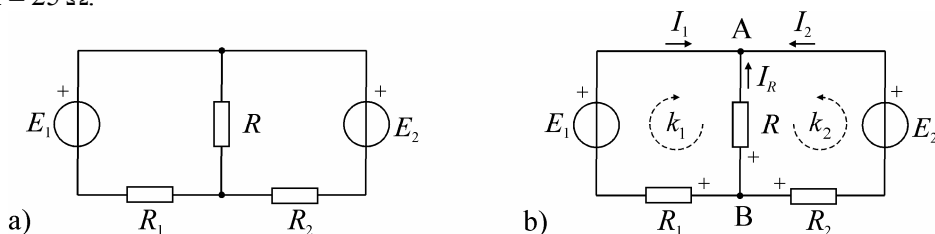
Vidi se da je broj nezavisnih jednačina po Prvom Kirhofovom zakonu plus broj nezavisnih jednačina po Drugom Kirhofovom zakonu jednak broju grana kola, n_g . To je dovoljno jednačina da se reši električno kolo, odnosno da se odredi jačina struje ili napon svake grane u kolu. Uz to, naponi i jačine struje na otpornicima su

povezani Omovim zakonom. Osim toga, na osnovu podataka o kolu poznati su naponi naponskih generatora, kao i struje strujnih generatora.

U složenom električnom kolu nije moguće unapred znati stvarne smerove struja u granama kola. Ipak, da bismo na bilo koji čvor mogli da primenimo Prvi Kirhofov zakon, neophodno je pretpostaviti smerove struja u granama kola. Kada se kolo reši, ako se kao rezultat dobije pozitivna vrednost jačine struje, to znači da se pretpostavljeni i stvarni smer struje poklapaju. Ako se kao rezultat dobije negativna vrednost jačine struje, to znači da se pretpostavljeni i stvarni smer struje ne poklapaju.

Primer 2.23

U kolu prikazanom na slici 2.30.a odrediti nepoznate jačine struja u svim granama kola. Brojni podaci su $E_1 = 30\text{ V}$, $E_2 = 25\text{ V}$, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$ i $R = 25\ \Omega$.



Slika 2.30. Uz primer 2.23, a) kolo i b) usvojeni referentni smerovi struja i orijentacija kontura.

Rešenje.

Pre rešavanja električnog kola potrebno je pretpostaviti referentne smerove struja u svim granama kola, kao na slici 2.30.b. Sa znakom + su označeni krajevi otpornika u koje struja ulazi (usklađeni referentni smerovi napona i struje na otporniku). Osim toga, potrebno je izabrati konture i pretpostaviti njihove orijentacije. Na slici 2.30.b konture su označene sa k_1 i k_2 , a smerovi obilaska isprekidanim linijama sa strelicama. Smer obilaska konture k_1 je u smeru kretanja kazaljke na časovniku, dok je smer obilaska konture k_2 suprotan od smera kretanja kazaljke na časovniku.

Kolo na slici 2.30 ima dva čvora, $n_\epsilon = 2$, i tri grane, $n_g = 3$.

Na osnovu prvog Kirhofovog zakona može da se napiše $n_\epsilon - 1 = 1$ nezavisna jednačina. Za čvor A ona glasi

$$-I_1 - I_2 - I_R = 0.$$

Na osnovu drugog Kirhofovog zakona mogu da se napišu $n_g - (n_\epsilon - 1) = 2$ nezavisne jednačine. Za pretpostavljene smerove obilaska kontura k_1 i k_2 , one glase

$$-RI_R + R_1I_1 - E_1 = 0,$$

$$-RI_R + R_2I_2 - E_2 = 0.$$

U dobijenom sistemu jednačina (tri jednačine) nepoznate su jačine struja u sve tri grane kola. Iz prve jednačine je $I_R = -I_1 - I_2$. Uvrštavanjem u druge dve jednačine, nakon sređivanja one postaju

$$(R + R_1)I_1 + RI_2 = E_1,$$

$$RI_1 + (R + R_2)I_2 = E_2.$$

Nakon zamene brojnih vrednosti, iz poslednje dve jednačine dobijaju se jačine struja I_1 i I_2 , a onda iz njih i I_R ,

$$I_1 = 0,1 \text{ A}, \quad I_2 = 0,3 \text{ A}, \quad I_R = -0,4 \text{ A}.$$

Negativan znak struje I_R označava da je pretpostavljeni smer struje suprotan od stvarnog.

2.19. Merenje jačine struje i napona

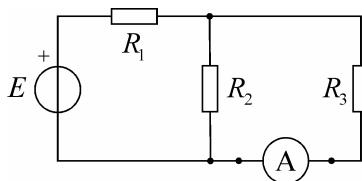
2.19.1. Ampermetar

Jačina struje kroz neki provodnik može da se izmeri instrumentom koji se naziva ampermetar. Grafički simbol za ampermetar prikazan je na slici 2.31.



Slika 2.31. Grafički simbol za ampermetar.

Merenje jačine struje vrši se tako što se provodnik u kome se meri jačina struje prekine, pa se spoji tako da struja prolazi kroz ampermetar. Primer vezivanja ampermetra prikazan je na slici 2.32. U ovom primeru, ampermetar meri jačinu struje u grani u kojoj se nalazi otpornik R_3 . Otpornost idealnog ampermetra jednaka je nuli i na njemu nema pada napona.



Slika 2.32. Primer vezivanja ampermetra.

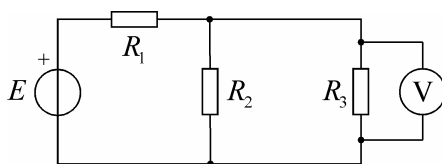
2.19.2. Voltmetar

Napon između dve tačke može da se izmeri instrumentom koji se naziva voltmetar. Grafički simbol za voltmetar prikazan je na slici 2.33.



Slika 2.33. Grafički simbol za voltmetar.

Voltmetar ima dva priključka, koje treba vezati za tačke između koji se napon meri. Primer vezivanja voltmetra prikazan je na slici 2.34. U ovom primeru, voltmetar meri napon na otporniku R_3 . Idealan voltmetar ima beskonačno veliku otpornost i kroz njega nema struje.



Slika 2.34. Primer vezivanja voltmetra.

2.20. Primena redne i paralelne veze otpornika

2.20.1. Primena redne veze otpornika

U praksi se otpornici vezuju na red iz puno razloga. Jedan je da bi se dobila otpornost što bliža zadatoj. Drugi razlog je da bi se na otpornicima rasporedila snaga Džulovih gubitaka.

Jedna od primena redne veze otpornika je naponski razdelnik. Primer naponskog razdelnika prikazan je na slici 2.35. Radi se o rednoj vezi dva otpornika koja je priključena na generator. Naponi otpornika su $U_1 = R_1 I$ i $U_2 = R_2 I$. Suma napona na otpornicima jednaka je naponu generatora, $E = U_1 + U_2$, odnosno

$$E = R_1 I + R_2 I,$$

odakle se dobija struja kroz generator i otpornike

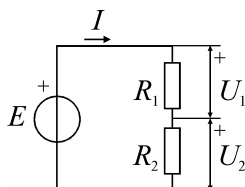
$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Naponi otpornika su

$$U_1 = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.25)$$

Napon na svakom od otpornika je manji od napona redne veze. Napon na otporniku veće otpornosti je veći od napona na otporniku manje otpornosti.

Naponski razdelnik omogućava dobijanje više različitih naponskih nivoa iz istog izvora, što se često koristi u praksi.



Slika 2.35. Naponski razdelnik.

2.20.2. Primena paralelne veze otpornika

Paralelna veza otpornika se koristi da bi se dobila otpornost što bliža željenoj ili da bi se disipacija rasporedila na otpornike (isti razlozi su navedeni i kod primene redne veze otpornika).

Paralelna veza otpornika se upotrebljava kao strujni razdelnik. Primer strujnog razdelnika prikazan je na slici 2.36. Radi se o paralelnoj vezi dva otpornika koja je priključena na generator. Jednačina po Prvom Kirhofovom zakonu za gornji čvor glasi $-I + I_1 + I_2 = 0$, odnosno

$$I = I_1 + I_2.$$

Napon na svakom otporniku jednak je naponu između priključaka paralelne veze, pa je $I_1 = E/R_1$ i $I_2 = E/R_2$, odakle je

$$I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2},$$

odnosno

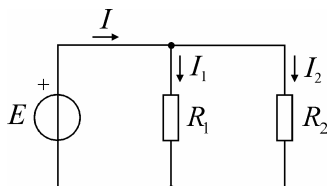
$$E = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Struje otpornika su

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2.26)$$

Jačine struja kroz otpornike su manje od jačine struje zajedničke grane. Struja kroz otpornik veće otpornosti je manja od struje kroz otpornik manje otpornosti.

Jedna od primena strujnog razdelnika je u električnim merenjima za merenje jačine struje.

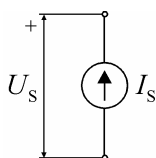


Slika 2.36. Strujni razdelnik.

2.21. Strujni generator

2.21.1. Idealan strujni generator

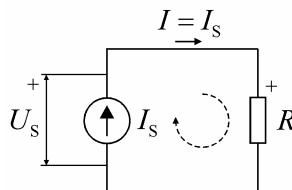
Po analogiji sa idealnim naponskim generatorom, koji održava konstantan napon između svojih priključaka, uvodi se dualan generator, koji održava konstantnu struju u svojim priključcima. Takav generator naziva se idealan strujni generator. Grafički simbol za idealan strujni generator prikazan je na slici 2.37. Jačina struje kroz priključke idealnog strujnog generatora je I_s , bez obzira na napon na generatoru.



Slika 2.37. Grafički simbol za idealan strujni generator.

U prostom kolu prikazanom na slici 2.38 jačinu struje diktira strujni generator, tj. $I = I_s$. Na osnovu drugog Kirhofovog zakona je $RI_s - U_s = 0$, odakle se dobija da je napon idealnog strujnog generatora jednak $U_s = RI_s$.

Napon idealnog strujnog generatora se može odrediti samo preko napona okolnih elemenata u kolu, jer struja idealnog strujnog generatora ne zavisi od napona na njegovim priključcima.



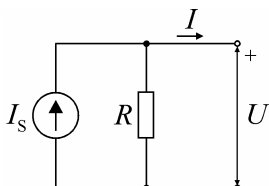
Slika 2.38. Prosto kolo sa idealnim strujnim generatorom.

Snaga idealnog strujnog generatora jednaka je proizvodu jačine struje i napona na generatoru (slika 2.37 ili 2.38)

$$P_s = I_s U_s. \quad (2.27)$$

2.21.2. Realan strujni generator

Realan strujni generator se modeluje kao paralelna veza idealnog strujnog generatora i otpornika (slika 2.39).



Slika 2.39. Realan strujni generator.

Realan strujni i realan naponski generator se mogu transfigurisati jedan u drugi. Idealan strujni i idealan naponski generatori se ne mogu transfigurisati jedan u drugi.

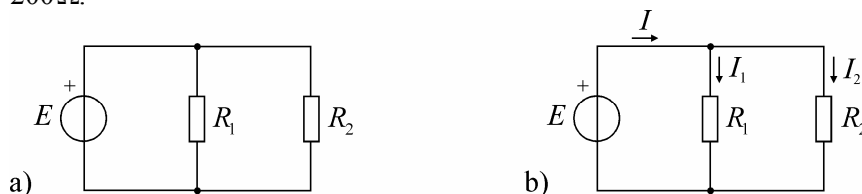
2.22. Teorema održanja snage

Teorema održanja snage u električnim kolima sa vremenski konstantnim strujama glasi: zbir snaga svih generatora u kolu jednak je zbiru snaga Džulovih gubitaka svih otpornika u kolu. Teorema sledi iz zakona održanja energije.

Snaga Džulovih gubitaka je uvek pozitivna, dok snaga generatora može biti pozitivna ili negativna.

Primer 2.24

U kolu prikazanom na slici 2.40.a odrediti snage svih elemenata. Proverite teoremu održanja snage za ovo kolo. Brojni podaci su $E = 12\text{ V}$, $R_1 = 100\Omega$ i $R_2 = 200\Omega$.



Slika 2.40. uz primer 2.24.

Rešenje.

Jačine struja u granama sa otpornicima (slika 2.40.b) su

$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{12}{100} = 120\text{ mA}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{12}{200} = 60\text{ mA}.$$

Na osnovu prvog Kirhofovog zakona, jačina struje kroz generator jednaka je

$$I = I_1 + I_2 = 180\text{ mA}.$$

Snaga naponskog generatora je

$$P_{\text{gen}} = EI = 12 \cdot 0,18 = 2,16\text{ W}.$$

Snage otpornika su

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 1,44 \text{ W}, \quad P_{R2} = R_2 I_2^2 = 0,72 \text{ W}.$$

Ukupna snaga Džulovih gubitaka u ovom kolu je

$$P_J = P_{R1} + P_{R2} = 1,44 \text{ W} + 0,72 \text{ W} = 2,16 \text{ W}.$$

Poređenjem snaga, zaključuje se da je snaga generatora jednaka ukupnoj snazi Džulovih gubitaka, $P_{\text{gen}} = P_J$, čime je teorema održanja snage proverena za dato kolo.

Primer 2.25

U kolu prikazanom na slici 2.41.a odrediti snage svih elemenata. Proverite teoremu održanja snage za ovo kolo. Brojni podaci su $E = 12 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$ i $R_2 = 200 \Omega$.



Slika 2.41. uz primer 2.25.

Rešenje.

Jačina struje kroz generator i otpornike (slika 2.41.b) je

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12}{300} = 40 \text{ mA}.$$

Snaga naponskog generatora je

$$P_{\text{gen}} = EI = 12 \cdot 0,04 = 0,48 \text{ W}.$$

Snage otpornika su

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 0,16 \text{ W}, \quad P_{R2} = R_2 I_2^2 = 0,32 \text{ W}.$$

Ukupna snaga Džulovih gubitaka u ovom kolu je

$$P_J = P_{R1} + P_{R2} = 0,16 \text{ W} + 0,32 \text{ W} = 0,48 \text{ W}.$$

Snaga generatora jednaka je ukupnoj snazi Džulovih gubitaka.

2.23. Tevenenova teorema

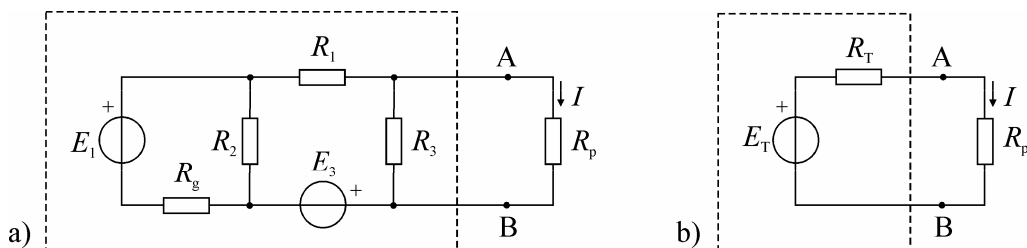
Prema Tevenenovoj teoremi, svaka mreža se u odnosu na bilo koje svoje dve tačke ponaša kao realan naponski generator. Ovaj zaključak je ilustrovan na slici 2.42. Ako se uoče bilo koje dve tačke u nekoj mreži, recimo tačke A i B na slici 2.42.a, uokviren deo mreže u odnosu na ta dva priključka ponaša se kao neki

ekvivalentan generator elektromotorne sile E_T i unutrašnje otpornosti R_T (slika 2.42.b). Taj ekvivalentan generator naziva se Tevenenov generator.

Tevenenova teorema daje i kako se određuju elektromotorna sila i unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora. Elementi Tevenenovog generatora mogu da se odrede merenjem ili računanjem.

Za primer prikazan na slici 2.42.a, voltmetrom može da se izmeri elektromotorna sila Tevenenovog generatora, tako što se izmeri napon između otvorenih priključaka A i B. Instrumentom za merenje otpornosti (ommetrom), može da se izmeri unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora, tako što se izmeri otpornost između otvorenih priključaka A i B, kada se svi generatori uklone iz kola (naponski kratko spoje, a strujni otvore).

Tevenenova teorema se koristi da bi se pojednostavilo rešavanje složenih kola, kao i za karakterizaciju složenih mreža u odnosu na svoje priključke.

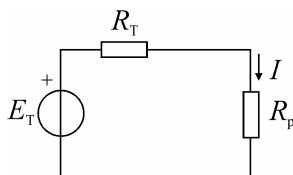


Slika 2.42. Primer primene Tevenenove teoreme a) originalno kolo i b) ekvivalentno kolo.

2.24. Prilagođenje po snazi

Neka je na ekvivalentan Tevenenov generator priključen prijemnik otpornosti R_p , kao na slici 2.43.

Maksimalna snaga se dobija na prijemniku čija je otpornost jednaka unutrašnjoj otpornosti ekvivalentnog Tevenenovog generatora, tj. za $R_p = R_T$. Tada se kaže da prijemnik prilagođen po snazi na generator.



Slika 2.43. Maksimalna snaga na prijemniku se dobija ako je $R_p = R_T$.

Ovo tvrđenje može da se dokaže na sledeći način. Neka je jačina struje u kolu na slici 2.43 jednaka I . Jačina struje se određuje iz $R_T I + R_p I - E_T = 0$ i iznosi

$$I = \frac{E_T}{R_T + R_p}.$$

Snaga prijemnika jednaka je

$$P_p = R_p I^2 = R_p \left(\frac{E_T}{R_T + R_p} \right)^2 = E_T^2 \frac{R_p}{(R_T + R_p)^2}.$$

Da bi se odredila otpornost prijemnika za koju će snaga prijemnika biti maksimalna, potrebno je odrediti vrednost otpornosti R_p za koju je prvi izvod prethodnog izraza jednak nuli,

$$\frac{dP_p}{dR_p} = E_T^2 \frac{(R_T + R_p)^2 - 2R_p(R_T + R_p)}{(R_T + R_p)^4} = E_T^2 \frac{(R_T - R_p)}{(R_T + R_p)^3}.$$

Prethodni izraz jednak je nuli, samo ako je otpornost prijemnika R_p jednaka otpornosti ekvivalentnog Tevenenovog generatora R_T ,

$$R_p = R_T. \quad (2.28)$$

Kada je otpornost prijemnika jednaka unutrašnjoj otpornosti ekvivalentnog Tevenenovog generatora, uslov (2.28), tada je snaga prijemnika maksimalna moguća.

2.25. Pregled jednačina

Jačina struje: $I = Q/t$.

Gustina struje: $J = I/S$.

Otpornost: $R = \rho l/S$.

Zavisnost otpornosti od temperature: $R = R_0(1 + \alpha(\theta - \theta_0))$.

Omov zakon: $U = RI$.

Energija: $W = UI t$.

Snaga: $P = UI$.

Redna veza otpornika: $R_{ekv} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$.

Paralelna veza otpornika: $\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$.

Paralelna veza dva otpornika: $R_{ekv} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Prvi Kirhofov zakon: $\sum I = 0$.

Drugi Kirhofov zakon: $\sum U = 0$.