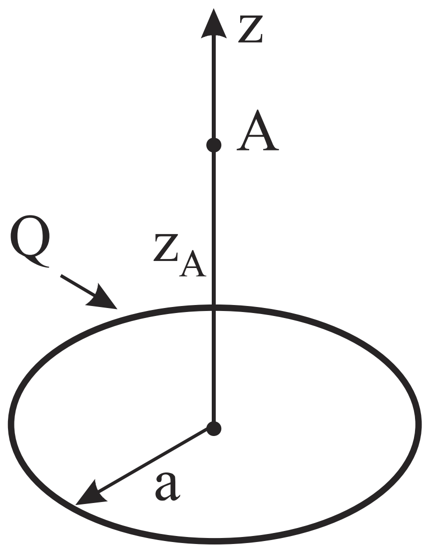
Petak, 29.10.2021.

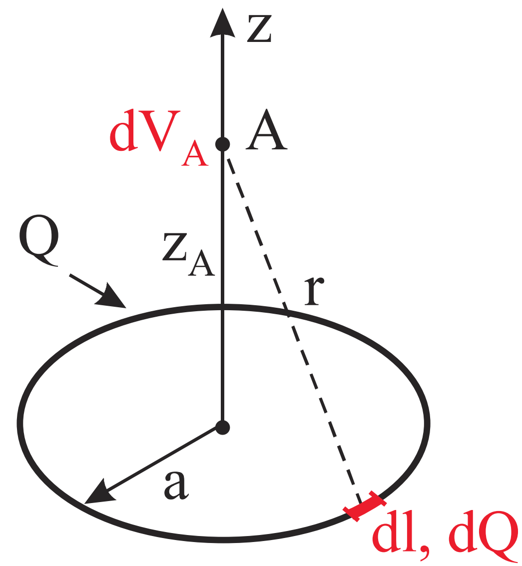
Vežbe 6

# Elektrostatika

**Zadatak 1.** Prsten poluprečnika a=10 cm, ravnomerno je naelektrisan po obimu naelektrisanjem Q=2 nC i nalazi se u vazduhu. Odrediti potencijal tačke A u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

$z_A=1{,}5\cdot a$.




$$dV_A=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q'\cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_A=\int\limits_{du\check{z}\ prstena} dV_A=\int_0^{2\pi a}\frac{Q'\cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot 2\pi a=\frac{\frac{Q}{2\pi a}}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot 2\pi a=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{V_A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z_A{}^2}}}$$

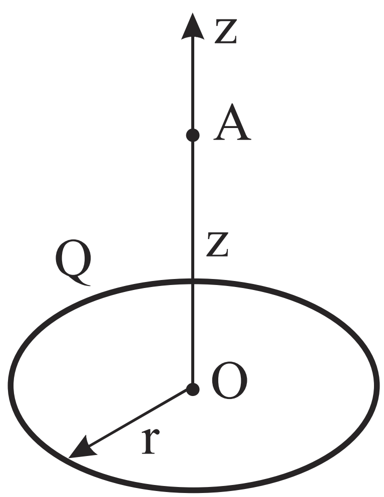
$$\boxed{V_A=100\,V}$$

**Zadatak 2.** Zadata je funkcija po kojoj se menja potencijal tačaka na osi simetrije tankog, ravnomerno naelektrisanog, prstena poluprečnika a.

a) Odrediti kako se u zavisnosti od z menja potencijal tačaka na osi tankog diska, poluprečnika a, konstantnog povšinskog naelektrisanja σ.

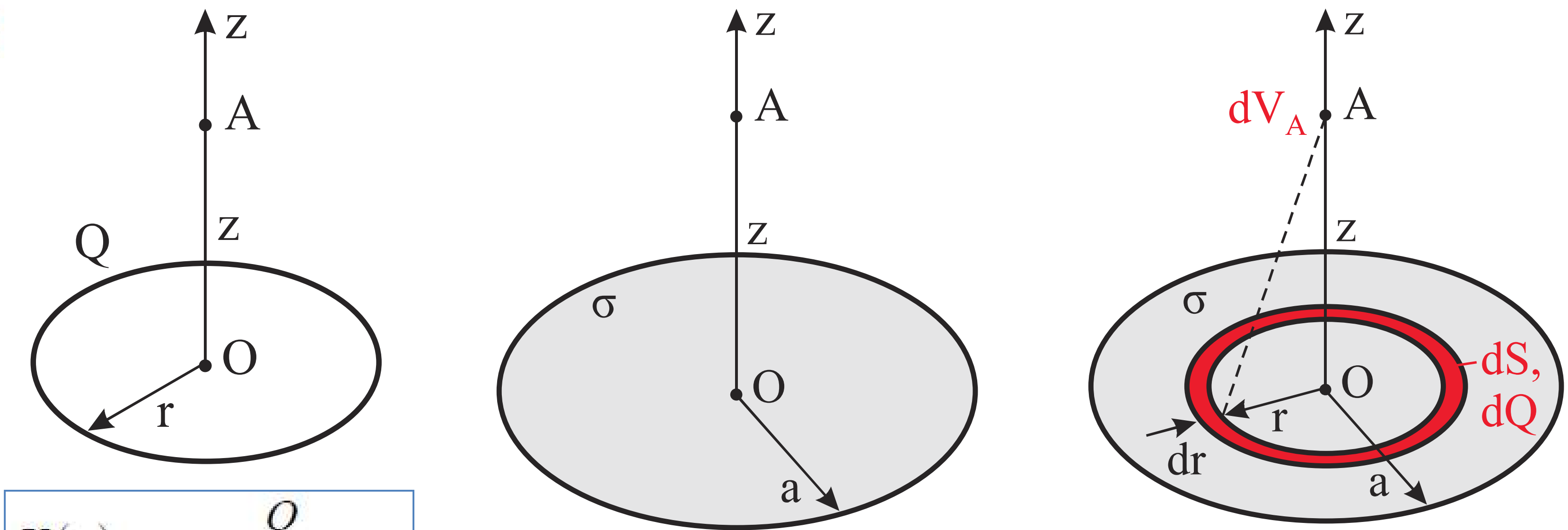
b) Odrediti intenzitet sile kojom će prsten delovati na probno naelektrisanje $Q_P$ koje se nalazi u tački A, na rastojanju $z=z_A$ od centra prstena.

c) Zamisliti da je tačka referentnog potencijala prstena premeštena u tačku O (centar prstena), pa odrediti novu funkciju potencijala tačaka na osi prstena.




$$V(z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$$

a)




$$\boxed{V(z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}}$$

$$dV_A=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}=\frac{\sigma\cdot dS}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}=\frac{\sigma\cdot 2r\pi\cdot dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V_A=\int\limits_{po\ disku} dV_A=\int_0^a\frac{\sigma\cdot 2r\pi\cdot dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}=\frac{\sigma\cdot 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^a\frac{r\cdot dr}{\sqrt{z^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\int_z^{\sqrt{z^2+a^2}}\frac{t\cdot dt}{\sqrt{t^2}}$$

$$\boxed{V_A=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left(\sqrt{z^2+a^2}-z\right)}$$

Smena: $t^2=z^2+r^2,\qquad t=\sqrt{z^2+r^2}$

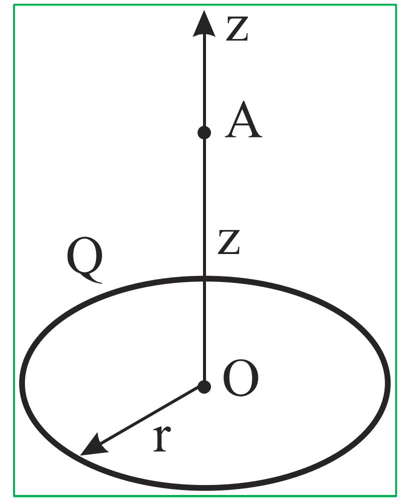
$2t\cdot dt=2r\cdot dr$

b)

$$E(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{d}{dz}\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(z^2+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Smena: $t = z^2 + r^2$

$t' = 2z$



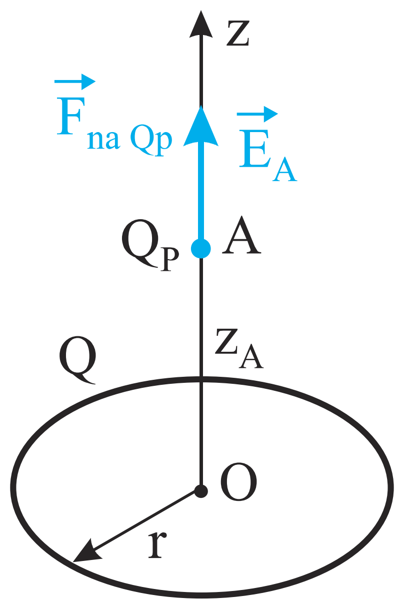

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot 2z$$

$$= \frac{Q\cdot z}{4\pi\varepsilon_0\cdot\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\boxed{E(r=a) = \frac{Q\cdot z}{4\pi\varepsilon_0\cdot\left(z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Smer vektora E je ka susednoj ekvipotencijalnoj površi nižeg potencijala.




$$\vec{F}_{na\,Q_P} = Q_P\cdot\vec{E}_A$$

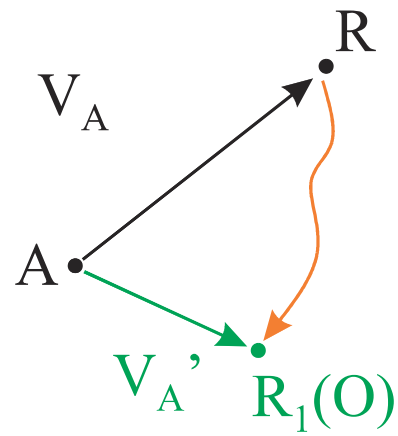
$$\boxed{\vec{F}_{na\,Q_P} = Q_P\cdot\frac{Q\cdot z_A}{4\pi\varepsilon_0\cdot\left({z_A}^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{i}_z}$$

c)

$$\boxed{V_A'} = \int_A^O \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_A^R \vec{E}\cdot\vec{dl} + \int_R^O \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_A^R \vec{E}\cdot\vec{dl} - \int_O^R \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$= \boxed{V_A(z)}\,\boxed{-V_O(z)}$$




$$V_A' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{0^2+r^2}}$$

$$\boxed{V_A' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

**Zadatak 3.** U jednom delu prostora potencijal je konstantan u svim tačkama ravni upravne na neku osu (recimo x), ali se menja od tačke do tačke duž ose x. Ako se potencijal duž ose x menja po zakonu $V(x) = V_0 \cdot \frac{x}{d} + V_1$ ($V_0$, $V_1$, d su konstante), koliki je intenzitet i koji je smer vektora E u tom delu prostora?

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(V_0 \cdot \frac{x}{d} + V_1\right) = -\frac{V_0}{d}$$

Intenzitet vektora je: $|E_x| = \left|-\frac{V_0}{d}\right|$

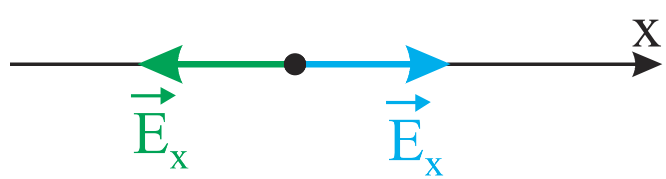
Pravac vektora: E ima pravac x ose.

Smer vektora E je određen znakom izraza za $E_x$.

Ako su $V_0$ i d pozitivne konstante, smer E je suprotan smeru x ose ($E_x$ je negativan).

| $V_0$ | d |
|---|---|
| + | + |
| − | − |

| $V_0$ | d |
|---|---|
| + | − |
| − | + |



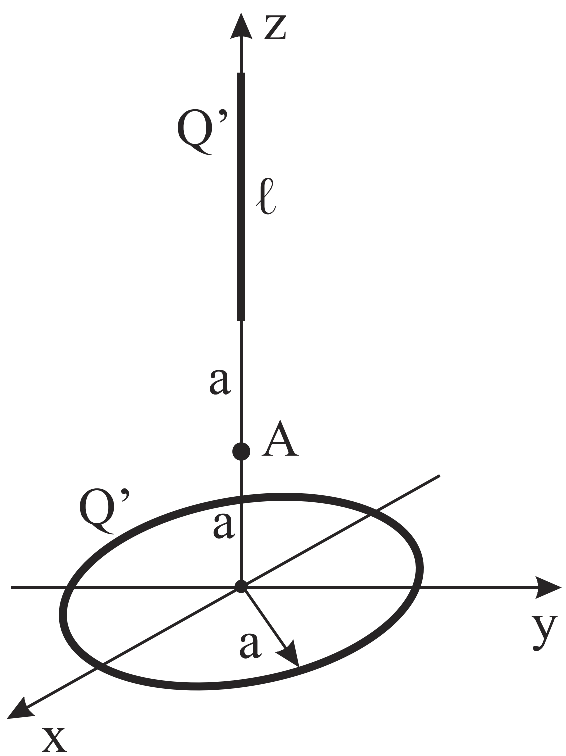
**Zadatak 4.** U jednom delu prostora potencijal je konstantan u svim tačkama. Šta možete reći o vektoru E u tom delu prostora?

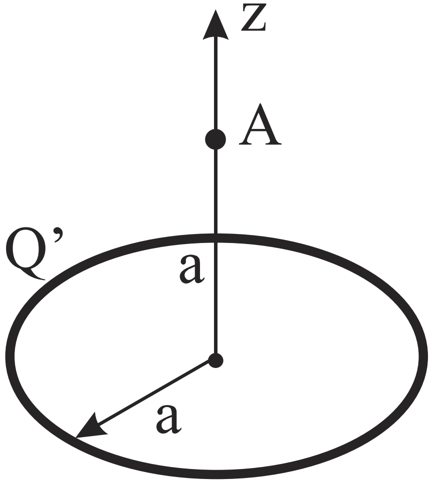
$$V = V_0$$

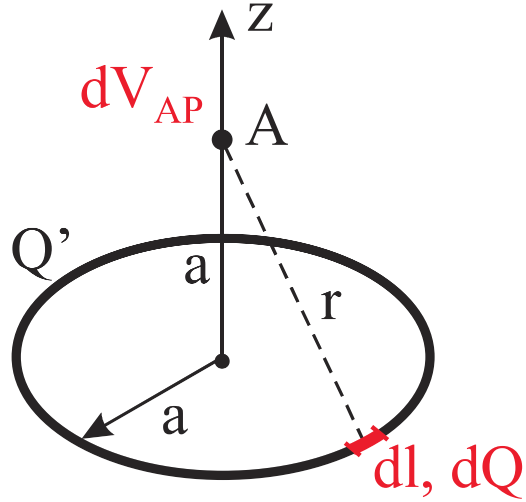
$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}V_0 = 0$$

Intenzitet vektora E je 0 u svim tačkama.

**Zadatak 5.** Na slici je prikazan štap dužine $\ell$=1 m i prsten poluprečnika a=0,5 m, oba sa istom podužnom količinom naelektrisanja Q'=10 pC/m. Izračunati potencijal tačke A u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti. Tačka A se nalazi na osi prstena, na polovini rastojanja između centra prstena i nižeg kraja štapa. Udaljenost donjeg kraja štapa od ravni prstena iznosi 2a.





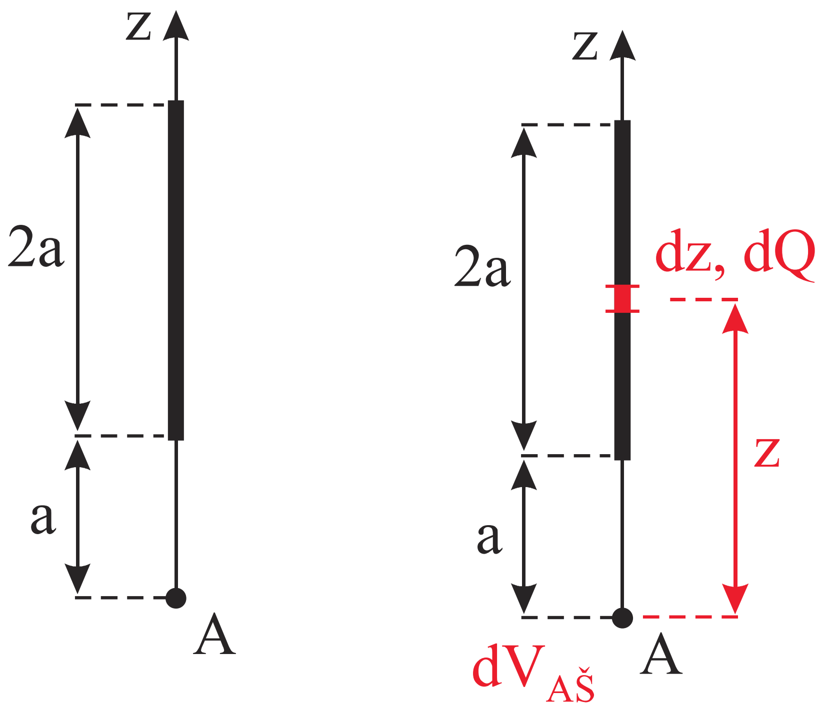




$$r = a\sqrt{2}$$

$$dV_{AP} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q' \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_{AP} = \int\limits_{\text{duž prstena}} dV_{AP} = \int_0^{2\pi a} \frac{Q' \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot 2\pi a = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} \cdot 2\pi a$$

$$\boxed{V_{AP} = \frac{\sqrt{2} \cdot Q'}{4\varepsilon_0}}$$




$$dV_{AŠ} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q' \cdot dz}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

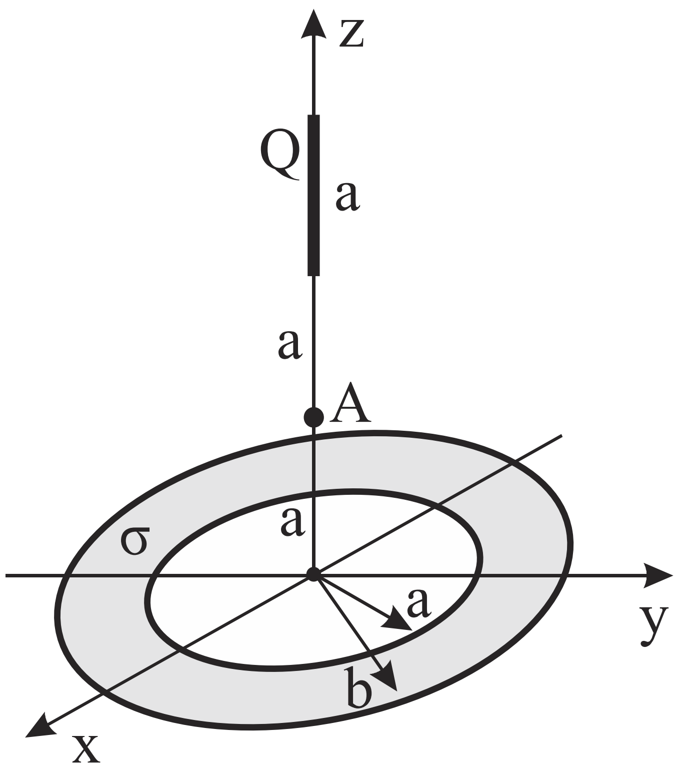
$$V_{AŠ} = \int\limits_{duž\ štapa} dV_{AŠ} = \int_a^{3a} \frac{Q' \cdot dz}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

$$\boxed{V_{AŠ} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln 3}$$

$$V_A = V_{AP} + V_{AŠ} = \frac{\sqrt{2} \cdot Q'}{4\varepsilon_0} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln 3 = 0,497\,V$$

$$\boxed{V_A = 0,5\,V}$$

**Zadatak 6. – DOMAĆI** Kružna pločica od dielektrika, naelektrisana je površinskom gustinom naelektrisanja σ sa jedne svoje strane. Na rastojanju 2a od centra kružne pločice, na njenoj osi, nalazi se početak tankog štapa od dielektrika dužine a. Štap je ravnomerno naelektrisan naelektrisanjem Q=5 nC. Odrediti nepoznatu površinsku gustinu naelektrisanja σ, ako se zna da je potencijal tačke A u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti, $V_A=0$ V. Sistem se nalazi u vazduhu.
a=1 cm, b=3 cm.




$$\boxed{V_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left(a\sqrt{10} - a\sqrt{2}\right)}$$

$$\boxed{V_Š = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\ln 2}$$

$$\boxed{\sigma = -3{,}155\,\frac{\mu C}{m^2}}$$