

PSI - OET - V22

ZAD. 1. Kompleksne vrednosti jačine struje i napona

$$i_1(t) = 0,5 \cdot \cos(\omega t - \frac{3\pi}{2}) \text{ A} \rightarrow \underline{I}_1 = ?$$

$$i_1(t) = 20\sqrt{6} \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \text{ A} \rightarrow \underline{I}_2 = ?$$

$$\underline{i}_2(t) = 20\sqrt{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) \text{ A}$$

$$\underline{I}_1(t) + \underline{I}_2(t) = ?$$

a) MEH 2 - ZAD. 43

b) MEH 2 - ZAD. 44

ZAD 2. Kompleksna snaga

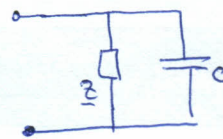
$$u(t) = 20 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \text{ [V]}$$

$$i(t) = 5 \cos \omega t \text{ [mA]}$$

$\underline{S} = ?$

a) MEH 2 - ZAD. 46

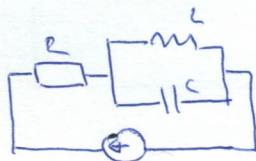
ZAD. 3 Fazorski dijagrami



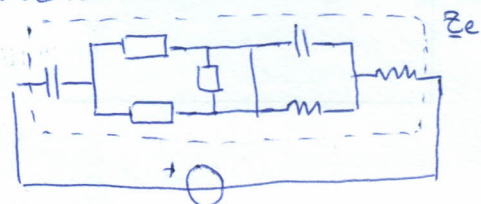
a) MEH 2 - ZAD. 47

b) MEH 2 - ZAD. 48 - DOMAĆI

ZAD. 4. Analiza kola u kompleksnom domenu



OT MEH 2 - ZAD. 49



b) MEH 2 - ZAD. 51

9. Kompleksne vrednosti jačine struje i napona

Zadatak 1

Zadatak 43. Za prostoperiodične električne struje jačina $i_1(t) = 0,5 \cos(5 \cdot 10^3 t - 3\pi/2)$ A i $i_2(t) = 2\sqrt{2} \sin(5 \cdot 10^3 t + \pi/3)$ A, odrediti njihove kompleksne efektivne vrednosti i skicirati fazore ovih veličina.

Rešenje

U najopštijem slučaju, za prostoperiodičnu jačinu struje $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$, kompleksna efektivna vrednost se dobija kao

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi}, \quad (9.1)$$

pri čemu je za jačinu struje $i_1(t)$, amplituda $I_{m1} = 0,5$ A, $\omega = 5 \cdot 10^3$ rad/s i $\psi_1 = -3\pi/2$, dok je kompleksna efektivna vrednost jednaka

$$\underline{I}_1 = \frac{I_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_1} = \frac{0,5}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{3\pi}{2}}. \quad (9.2)$$

Ovaj oblik se naziva eksponencijalni oblik kompleksnog broja, i u njemu su jasno naznačene vrednosti modula kompleksnog broja, odnosno efektivne vrednosti $I = I_m/\sqrt{2}$, i početne faze. Primenom Ojlerovog obrasca, iz ovog oblika se može dobiti i algebarski oblik kompleksnog broja

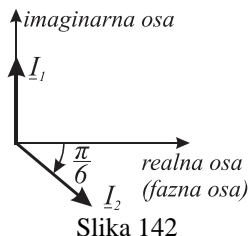
$$\underline{I}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[0 - j \sin\frac{3\pi}{2} \right] = j \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ A}. \quad (9.3)$$

U slučaju jačine struje $i_2(t)$, neophodno je sinusnu funkciju prevesti u kosinusnu funkciju, koristeći trigonometrijski identitet $\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$, čime se dobija da je

$$\begin{aligned} i_2(t) &= 2\sqrt{2} \sin\left(5 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cos\left(5 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2} \cos\left(5 \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ A}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

odakle je kompleksna efektivna jačina struje

$$\underline{I}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right] = (\sqrt{3} - j) \text{ A}. \quad (9.5)$$



Slika 142

Fazori ovih veličina se predstavljaju kao vektori u kompleksnoj ravni, pri čemu se početna faza uvek računa od fazne ose, kao što je prikazano na slici 142.

U eksponencijalnom obliku se mogu videti početne faze fazora, pri čemu, ako je početna faza negativna, fazor crtamo ispod realne (fazne) ose, dok se, u suprotnom, crta iznad ose.

Zadatak 2

Zadatak 44. Primenom kompleksnog računa, odrediti zbir sledeće dve prostoperiodične jačine struja: $i_1(t) = 20 \sqrt{6} \sin(\omega t + \pi/3)$ A i $i_2(t) = 20 \sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/3)$ A

Rešenje

U prvom koraku vršimo pripreme za određivanje kompleksnih efektivnih vrednosti, odnosno za prevođenje u kompleksni domen. Kao rezultat dobijamo jačine struja izračene preko kosinusne funkcije

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 20\sqrt{6} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 20\sqrt{6} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 20\sqrt{6} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) A, \\ i_2(t) &= 20\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) A, \end{aligned} \quad (9.6)$$

odakle se dobijaju kompleksne efektivne vrednosti

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ &= 20\sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = 20\sqrt{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right] = (30 - j10\sqrt{3}) A, \\ \underline{I}_2 &= \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{3}} \\ &= 20 \left[\cos\frac{\pi}{3} + j \sin\frac{\pi}{3} \right] = 20 \left[\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] = (10 + j10\sqrt{3}) A. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Sabiranjem ova dva kompleksna broja dobijamo

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (30 - j10\sqrt{3}) + (10 + j10\sqrt{3}) = 40 A = 40 e^{j0} A. \quad (9.8)$$

Kada je poznat eksponencijalni oblik kompleksnog broja, koji je u najopštijem slučaju jednak $\underline{I} = I e^{j\psi}$, vremenski oblik date veličine se dobija kao

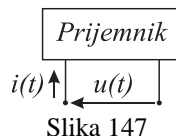
$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi), \quad (9.9)$$

odakle se dobija da je vremenski oblik zbira jačina struja jednak

$$i_1(t) + i_2(t) = 40\sqrt{2} \cos(\omega t + 0^\circ) A. \quad (9.10)$$

Zadatak 3

Zadatak 46. Na slici je prikazan prijemnik električne energije, čije su trenutne vrednosti prostoperiodičnog napona i jačine električne struje: $u(t) = 20 \sin(\omega t + \pi/3)$ V i $i(t) = 5 \cos \omega t$ mA. Izračunati aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu ovog prijemnika.



Rešenje

Zadatak rešavamo u kompleksnom domenu, tako što u prvom koraku predstavimo napon i jačinu struje prijemnika u obliku kosinusa,

$$\begin{aligned} u(t) &= 20 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 20 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 20 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) V, \\ i(t) &= 5 \cos \omega t \text{ mA}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Njihove kompleksne efektivne vrednosti iznose

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} V \quad \text{ i } \quad \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j0} = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ mA}. \quad (9.22)$$

Kompleksna snaga prijemnika se računa kao

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \frac{5}{\sqrt{2}} = 50 e^{-j\frac{\pi}{6}} \text{ mVA} \\ &= \left[50 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j50 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = \left[50 \frac{\sqrt{3}}{2} - j50 \frac{1}{2} \right] = (25\sqrt{3} - j25) \text{ mVA}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Kompleksna snaga je u opštem slučaju kompleksan broj oblika $\underline{S} = P + jQ$, pri čemu se realni deo ovog izraza, P , naziva aktivna snaga, dok se imaginarni deo, Q , naziva reaktivna snaga prijemnika. U našem slučaju ove dve snage iznose

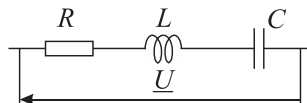
$$P = 25\sqrt{3} \text{ mW} \quad \text{ i } \quad Q = -25 \text{ mVAr}. \quad (9.24)$$

Prividna snaga prijemnika iznosi

Zadatak 4

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = 50 \text{ mVA}. \quad (9.25)$$

Zadatak 47. Na slici je prikazana redna veza otpornika, kalema i kondenzatora, koja je priključena na prostoperiodični napon efektivne vrednosti $U = 100 \text{ V}$ i frekvencije 50 Hz . Skicirati fazorski dijagram napona i jačine struje i dijagram impedansi ove veze.



Slika 148

Poznato je: $R = 30 \, \Omega$, $L = 160 \text{ mH}$, $C = 80 \, \mu\text{F}$.

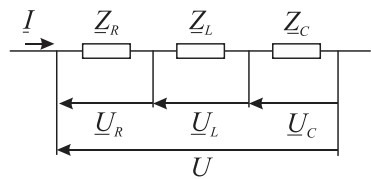
Rešenje

Na osnovu poznavanja pojedinih elemenata i frekvencije kola, $f = 50 \text{ Hz}$, kao prvi korak je neophodno odrediti impedanse pojedinih elemenata

$$\underline{Z}_R = R = 30 \, \Omega, \quad \underline{Z}_L = j\omega L = j50 \, \Omega \quad \text{ i } \quad \underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j40 \, \Omega. \quad (9.26)$$

Elementi su međusobno redno vezani i mogu se zameniti ekvivalentnom impedansom,

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 30 + j50 - j40 = (30 + j10) \, \Omega. \quad (9.27)$$



Slika 149

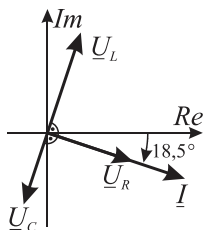
Na osnovu poznavanje napona na rednoj vezi može se odrediti jačina struje koja postoji u elementima

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{100}{30 + j10} \frac{30 - j10}{30 - j10} = (3 - j) \text{ A} \\ &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} e^{j \arctan \frac{-1}{3}} = \sqrt{10} e^{-j18,5^\circ} \text{ A}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

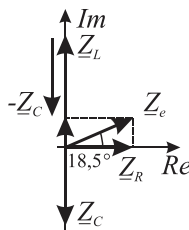
Naponi na pojedinim elementima sada iznose

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{Z}_R \underline{I} = 30 \cdot (3 - j) = (90 - j30) \text{ V} & \Rightarrow \underline{U}_R &= 95 e^{-j18,5^\circ} \text{ V}, \\ \underline{U}_L &= \underline{Z}_L \underline{I} = j50 \cdot (3 - j) = (50 + j150) \text{ V} & \Rightarrow \underline{U}_L &= 158 e^{j71,56^\circ} \text{ V}, \\ \underline{U}_C &= \underline{Z}_C \underline{I} = -j40 \cdot (3 - j) = (-40 - j120) \text{ V} & \Rightarrow \underline{U}_C &= 126,5 e^{-j108,43^\circ} \text{ V}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Eksponecijalni oblik kompleksnih efektivnih vrednosti napona i jačina struja je veoma zgodan za upotrebu prilikom crtanja fazorskog dijagrama, pošto se u tom obliku jasno vide početne faze pojedinih fazora. U ovom slučaju dobija se fazorski dijagram prikazan na slici 150.



Slika 150



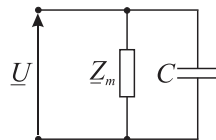
Slika 151

U slučaju redne veze elemenata treba primetiti da je jačina struje zajednička veličina, pa se u odnosu na nju posmatraju naponi na pojedinim elementima. Napon na otporniku je u fazi sa jačinom strujom, dok napon na kalemu prednjači za $\pi/2$, a napon na kondenzatoru kasni za $\pi/2$, u odnosu na jačinu struje.

Dijagram impedansi predstavljen je na slici 151, pri čemu se u kompleksnoj ravni crtaju kompleksni brojevi, u obliku fazora, koji predstavljaju impedanse pojedinih elemenata. Pošto se radi o rednoj vezi elemenata, ekvivalentna impedansa na dijagramu impedansi se dobija i kao zbir odgovarajućih fazora.

Domaći zadatak

Zadatak 48. Na slici su prikazani impedansa $Z_m = (10 + j20) \Omega$ i kondenzator kapacitivnosti $C = 200 \mu F$, koji su spojeni na napon efektivne vrednosti $220 V$ i frekvencije $50 Hz$. Skicirati fazorski dijagram napona i jačine struje i dijagram impedansi ove veze.



Slika 152

Rešenje

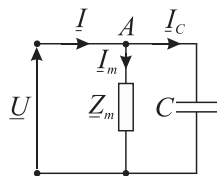
Pretpostavimo da je početna faza ulaznog napona jednaka nuli, $\theta = 0^\circ$, čime kompleksna efektivna vrednost ovog napona iznosi

$$\underline{U} = U \cdot e^{j0} = U e^{j0} = U = 220 V, \quad (9.30)$$

dok je impedansa kondenzatora $\underline{Z}_C = -j(1/\omega C) = -j16 \Omega$. U kolu postoje električne struje, čije su jačine prikazane na slici 153, pri čemu su

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}}{Z_m} = \frac{220}{10 + j20} = \frac{22}{1 + j2} \frac{1 - j2}{1 - j2} = (4,4 - j8,8) A, \quad (9.31)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{Z_C} = \frac{220}{-j16} \frac{j}{j} = j13,8 A,$$



Slika 153

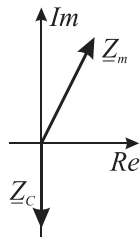
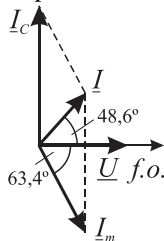
dok su u eksponencijalnom obliku ove jačine struja jednake

$$\underline{I}_m = 9,8 e^{-j63,4^\circ} A \quad \text{ i } \quad \underline{I}_C = 13,8 e^{j90^\circ} A. \quad (9.32)$$

Na osnovu I Kirhofovog zakona za čvor A, dobijamo jačinu ulazne struje

$$\underline{I} = \underline{I}_m + \underline{I}_C = 4,4 - j8,8 + j13,8 = (4,4 + j5) A \Rightarrow \underline{I} = 6,6 e^{j48,6^\circ} A, \quad (9.33)$$

pri čemu je fazorski dijagram napona i jačine struja prikazan na slici 154, dok je dijagram impedansi prikazan na slici 155.



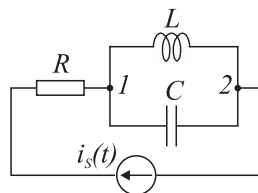
Slika 155

10. Analiza kola u kompleksnom domenu

Zadatak 5

Zadatak 49. Električno kolo sa slike je priključeno na strujni generator efektivne vrednosti jačine struje $I_S = 1$ A, početne faze $\psi = \pi/2$ i $\omega = 104$ rad/s.

- Izračunati: I_L , I_C , \underline{U}_{12} ,
- skicirati fazorski dijagram ovih veličina.

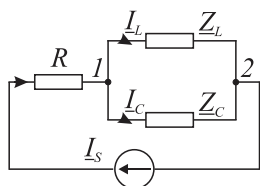


Slika 156

Poznato je: $R = 20 \Omega$, $L = 5$ mH, $C = 1 \mu F$.

Rešenje

U prvom koraku, električno kolo prevodimo u kompleksan domen, pri čemu impedanse elemenata iznose $\underline{Z}_R = R = 20 \Omega$, $\underline{Z}_L = j\omega L = j50 \Omega$ i $\underline{Z}_C = -j(1/\omega C) = -j100 \Omega$, dok je kompleksne efektivna vrednost jačine struje strujnog generatora jednaka $\underline{I}_S = 1 e^{j\pi/2}$ A.



Slika 157

a) Može se uočiti da je jačina struje kroz otpornik otpornosti R jednaka jačini struje strujnog generatora, $I_R = I_S = j1$ A. Paralelna veza impedansi kalema i kondezatora predstavlja strujni razdelnik u odnosu na jačinu struje kroz otpornik, pri čemu je

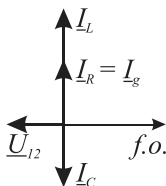
$$\underline{I}_L = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \underline{I}_R = \frac{-j100}{-j100 + j50} j1 = j2 \text{ A}, \quad (10.1)$$

dok je $\underline{I}_C = \underline{I}_R - \underline{I}_L = -j1$ A, a napon između tačaka 1 i 2 iznosi

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{I}_R (\underline{Z}_C \parallel \underline{Z}_L) \\ &= \underline{Z}_L \underline{I}_L = \underline{Z}_C \underline{I}_C = j50 \cdot j2 = -100 \text{ V}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Znak minus kod napona \underline{U}_{12} znači da je tačka 1 na nižem potencijalu u odnosu na tačku 2, odnosno da napon ima i fazni pomeraj od 180° .

b) fazorski dijagram jačina struja i napona u kolu, prikazan je na slici 158.



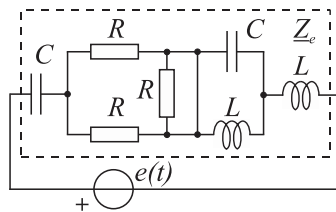
Slika 158

Zadatak 6

Zadatak 51. U električnom kolu sa slike odrediti:

- ekvivalentnu impedansu \underline{Z}_e ,
- trenutnu vrednost jačine struje kroz generator $e(t)$,
- kompleksnu snagu generatora $e(t)$.

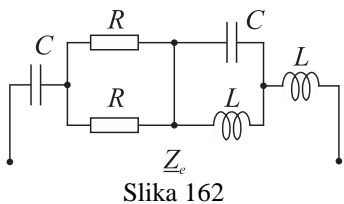
Brojne vrednosti su: $e(t) = 50\sqrt{2} \cos(1000t + 2\pi) \text{ V}$,
 $R = 40 \Omega$, $L = 40$ mH, $C = 50 \mu F$.



Slika 161

Rešenje

Impedanse pojedinih elemenata iznose $\underline{Z}_R = R = 40 \Omega$, $\underline{Z}_L = j\omega L = j40 \Omega$ i $\underline{Z}_C = -j(1/\omega C) = -j20 \Omega$, dok je kompleksna efektivna vrednost $e(t)$ generatora $\underline{E} = 50 e^{j2\pi} = 50 \text{ V}$.

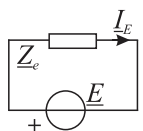


Slika 162

Prisustvo kratkog spoja u ekvivalentnoj impedansi \underline{Z}_e , eliminiše otpornik na vertikali, pri čemu preostaje kolo, prikazano na slici 162, odakle se dobija

$$\begin{aligned}\underline{Z}_e &= \underline{Z}_C + [(\underline{Z}_R \parallel \underline{Z}_R) + (\underline{Z}_C \parallel \underline{Z}_L)] + \underline{Z}_L \\ &= -j20 + \frac{40 \cdot 40}{40 + 40} + \frac{-j20 \cdot j40}{-j20 + j40} + j40 \quad (10.5) \\ &= -j20 + 20 - j40 + j40 = (20 - j20) \Omega.\end{aligned}$$

b) Nakon određivanja ekvivalentne impedanse, kolo se u znatnoj meri pojednostavljuje, kao što je prikazano na slici 163, odakle se može odrediti jačina struje kroz naponski generator. Ova jačina struja iznosi



$$\underline{I}_E = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_e} = \frac{50}{20 - j20} = \frac{50}{20} \frac{1}{1 - j} \frac{1 + j}{1 + j} = \frac{5}{2} \frac{1 + j}{1 + 1} = 1,25(1 + j) \text{ A}, \quad (10.6)$$

na osnovu čega se određuje efektivna vrednost i početna faza,

$$\underline{I}_E = 1,25\sqrt{2} e^{j \arctg \frac{+1}{+1}} = 1,25\sqrt{2} e^{j \frac{\pi}{4}} \text{ A}, \quad (10.7)$$

koji su neophodni da bi se odredio vremenski oblik jačine struje

$$i_E(t) = 1,25\sqrt{2} \sqrt{2} \cos(1000t + \pi/4) = 2,5 \cos(1000t + \pi/4) \text{ A}. \quad (10.8)$$

c) kompleksna snaga naponskog generatora iznosi

$$\underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}_E^* = 50 \cdot 1,25(1 + j)^* = 62,5(1 - j) = (62,5 - j62,5) \text{ VA}. \quad (10.9)$$