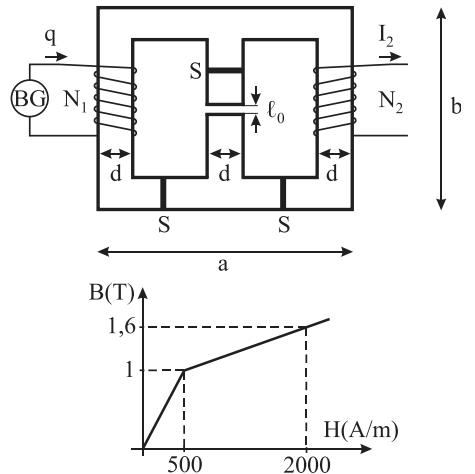


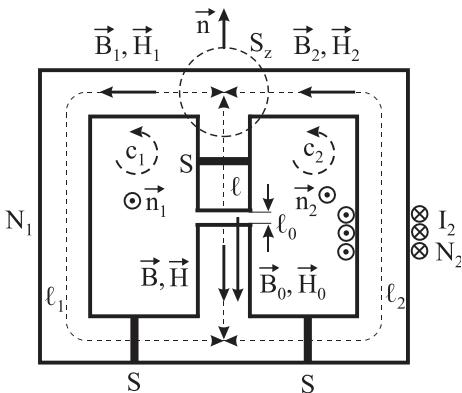
EM-OET2-V11

Zadatak 1. Na tanko jezgro sa slike namotano je ravnomerno i gusto N_2 zavojaka sa strujom $I_2=2$ A. Broj zavojaka N_2 je izabran tako da grana na kojoj se namotaj nalazi bude na ivici zasićenja (500 A/m, 1 T). Dimenzije kola iznose $a=10$ cm, $b=5$ cm, $d=1$ cm, $S=1$ cm 2 , $l_0=1$ mm. Kriva prvobitnog magnetisanja prikazana je na slici. Napisati potrebne jednačine po prvom i drugom Kirhofovom zakonu i izračunati:

- a) Magnetski fluks kroz procep.
 b) Proteklu količinu naielktrisanja q , pri uspostavljanju struje, kroz balistički galvanometar otpornosti $R_{BG}=10 \Omega$ sa $N_1=5$ zavojaka.
 Rasipanje zanemariti.



Rešenje:



$$\oint_{c1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{Sc1} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \Leftrightarrow (\vec{H}, d\vec{l}) = 0 \quad \vec{J} = 0$$

$$H_1 \cdot l_1 - H \cdot l - H_0 \cdot l_0 = 0$$

$$\oint_{c2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{Sc2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \Leftrightarrow (\vec{H}, d\vec{l}) = 0 \quad \Leftrightarrow (\vec{J}_2, \vec{n}_2) = 0$$

$$H_2 \cdot l_2 + H \cdot l + H_0 \cdot l_0 = N_2 I_2 \quad \text{Ne znamo broj zavojaka } N_2!$$

$$\oint_{S_z} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad B_1 \cdot S - B_2 \cdot S + B \cdot S = 0 \quad B_1 = B_2 - B = 1 - B$$

$$\oint_{S_{z1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad -B \cdot S + B_0 \cdot S_0 = 0 \quad B = B_0$$

Pretpostavimo da je: $B_1 = \mu_1 \cdot H_1 \quad H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} \quad \mu_1 = \frac{1}{500}$

$$B = \mu_1 \cdot H \quad H = \frac{B}{\mu_1}$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\frac{B_1}{\mu_1} \cdot l_1 - \frac{B}{\mu_1} \cdot l - \frac{B}{\mu_0} \cdot l_0 = 0, \quad \frac{1-B}{\mu_1} \cdot l_1 - \frac{B}{\mu_1} \cdot l - \frac{B}{\mu_0} \cdot l_0 = 0$$

$$B = \frac{\frac{\mu_1}{l_1} l_1}{\frac{\mu_1}{l_1} l + \frac{l}{\mu_1} + \frac{l_0}{\mu_0}} = 0,074 \text{ T} < 1 \text{ T} \quad \text{Pretpostavka ok.}$$

a)

$$\Phi_0 = B_0 \cdot S_0 = B \cdot S$$

$$\boxed{\Phi_0 = 7,4 \mu\text{Wb}}$$

$$N_{BG} = N_1$$

b)

$$q = -\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot \left(\Phi_{KR} - \Phi_{POC}^0 \right) = -\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot \int_{S_{PP}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \quad \cos \angle(\vec{B}_1, \vec{n}_{BG}) = -1 = -\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot (-B_1 \cdot S) = \frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot (1 - B) \cdot S \quad \boxed{q = 46,3 \mu\text{C}}$$

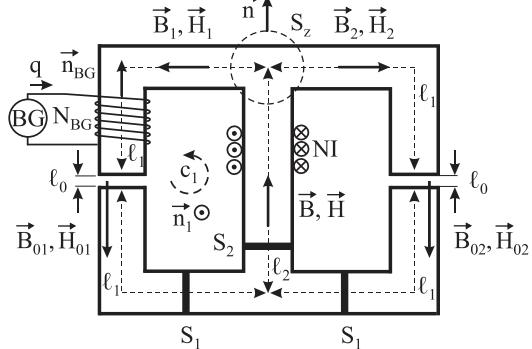
Zadatak 2. Tanko, simetrično, magnetsko kolo i idealizovana magnetska karakteristika feromagnetskog materijala od koga je ono načinjeno dati su na slici. Pre uspostavljanja struje I kroz namotaj sa $N=100$ zavojaka, magnetsko kolo je bilo nemagnetisano. U procesu uspostavljanja struje I , kroz balistički galvanometar, u naznačenom referentnom smeru, protekne nadelektrisanje $q=45 \mu C$. Namotaj galvanometra ima $N_{BG}=5$ zavojaka, ukupne otpornosti $R_{BG}=20 \Omega$. Dužine središnjih linija delova kola su: $\ell_1=6 \text{ cm}$, $\ell_2=5 \text{ cm}$, $\ell_0=1 \text{ mm}$, a površine poprečnih preseka su: $S_1=S_0=4 \text{ cm}^2$, $S_2=3 \text{ cm}^2$. Izračunati:

- jačinu struje I ,
- energiju utrošenu na uspostavljanje magnetskog polja u magnetskom kolu.

Rasipanja zanemariti.

Rešenje:

a) $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_{cl}} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \nabla(\vec{H}, d\vec{l}) = 0 \quad \nabla(\vec{J}, \vec{n}_1) = 0$



$$H_1 \cdot l_1 + H_{01} \cdot l_0 + H \cdot l_2 = NI$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad B_1 \cdot S_1 - B \cdot S_2 + B_2 \cdot S_1 = 0$$

Zbog simetrije: $B_1 = B_2 \Rightarrow B = \frac{2 \cdot B_1 \cdot S_1}{S_2}$

$$\oint_{S_{z1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad -B_1 \cdot S_1 + B_{01} \cdot S_0 = 0 \quad B_1 = B_{01}$$

$$q = -\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot \left(\Phi_{KR} - \Phi_{POC}^0 \right) = -\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot \int_{S_1} \underbrace{\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}}_{\cos \alpha(\vec{B}_1, \vec{n}_{BG}) = -1}$$

$$q = -\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot (-B_1 \cdot S_1) = \frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot B_1 \cdot S_1$$

$$B_1 = \frac{q \cdot R_{BG}}{N_{BG} \cdot S_1} = 0,45 \text{ T} \quad \xrightarrow{\text{sa krive}} \quad H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{0,45}{\frac{1}{100}} = 45 \text{ A/m}$$

$$B_{01} = B_1 = 0,45 \text{ T} \quad \Rightarrow \quad H_{01} = \frac{B_{01}}{\mu_0} = \frac{0,45}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 358,1 \text{ kA/m}$$

$$B = \frac{2 \cdot B_1 \cdot S_1}{S_2} = 1,2 \text{ T} \quad \xrightarrow{\text{sa krive}} \quad H = \frac{B - 0,9}{\frac{0,4}{400}} = 300 \text{ A/m}$$

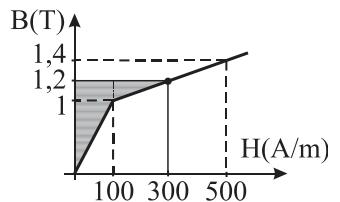
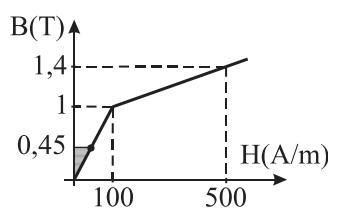
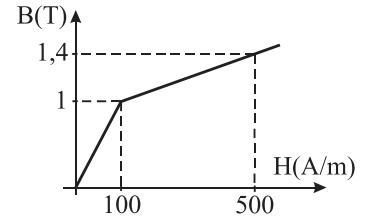
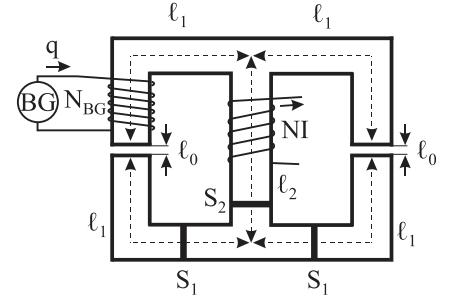
$$I = \frac{H_1 \cdot l_1 + H_{01} \cdot l_0 + H \cdot l_2}{N} \quad I = 3,758 \text{ A}$$

b)

$$W_m = 2 \cdot W_{m1} + W_{m2} = 2 \cdot w_{m1} \cdot V_1 + w_{m2} \cdot V_2 = 2 \cdot w_{m1} \cdot l_1 \cdot S_1 + w_{m2} \cdot l_2 \cdot S_2$$

$$W_m = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot B_1 \cdot H_1 \cdot l_1 \cdot S_1 + \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 + (B-1) \cdot (100-0) + \frac{1}{2} \cdot (B-1) \cdot (H-100) \right] \cdot l_2 \cdot S_2$$

$$W_m = 0,486 \text{ mJ} + 0,3 \text{ mJ}$$

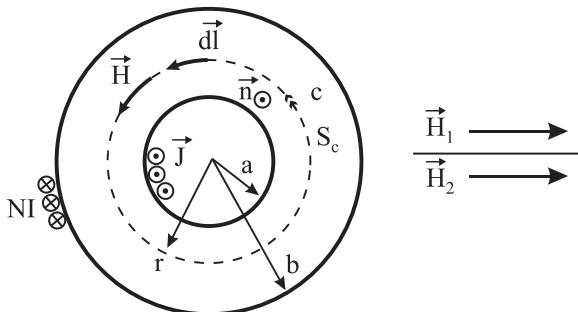


Zadatak 3. Na slici je prikazano torusno jezgro koje se sastoji iz dva dela načinjena od različitih materijala. Magnetske karakteristike ovih materijala date su na slici. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotano $N=314$ zavojaka u kojima se uspostavlja struja jačine $I=1,8 \text{ A}$. Pre uključenja struje I , jezgro je bilo nenamagnetisano. Oko torusa je postavljen probni namotaj sa $N_p=4$ zavojka. Krajevi probnog namotaja su kratko spojeni. Ukupna otpornost probnog namotaja je $R=20 \Omega$. Dimenzije jezgra su: $a=6 \text{ cm}$, $b=12 \text{ cm}$ i $h=5 \text{ cm}$.

- Odrediti kako se u funkciji rastojanja tačke od ose torusa menja intenzitet indukcije, $B(r)$, i prikazati tu funkciju grafički.
- Izračunati fluks kroz presek jezgra, Φ_J .
- Odrediti brojnu vrednost nanelektrisanja koje će proteći kroz probni namotaj (u naznačenom smeru) nakon isključenja struje I . Smatrali da, nakon isključenja struje, zaostali fluks kroz jezgro ima vrednost $\Phi_r=10\% \Phi_J$.

Rešenje:

a)



Granični uslov:

$$H_{1t} = H_{2r} = H$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \Leftrightarrow (\vec{H}, d\vec{l}) = 0 \quad \Leftrightarrow (\vec{J}, \vec{n}) = 0$$

$$H \cdot 2\pi r = NI$$

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r} \quad a < r < b$$

Sa krive magnetisanja se vidi da je deo torusa, načinjen od materijala 2, stalno u linearnom režimu.

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{1}{500} \cdot \frac{NI}{2\pi r}, \quad a < r < b$$

$$B_2(a) = 3 \text{ T}$$

$$B_2(b) = 1,5 \text{ T}$$

Za deo torusa načinjen od materijala 1 treba da se ispita režim rada:

$$\left. \begin{array}{l} H_{1\max}(a) = \frac{NI}{2\pi a} = 1500 \text{ A/m} > H_{c1} \\ H_{1\min}(b) = \frac{NI}{2\pi b} = 750 \text{ A/m} < H_{c1} \end{array} \right\} \quad \text{Sledi da je materijal 1 u delimičnom zasićenju.}$$

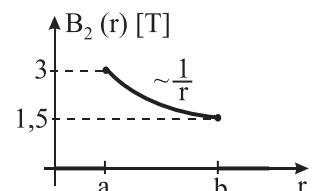
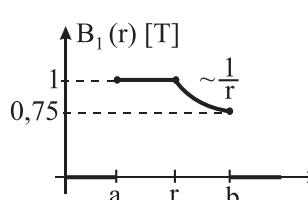
Poluprečnik zasićenja iznosi:

$$H_{c1} = \frac{NI}{2\pi r_c} \Rightarrow r_c = \frac{NI}{2\pi H_{c1}} = 9 \text{ cm}$$

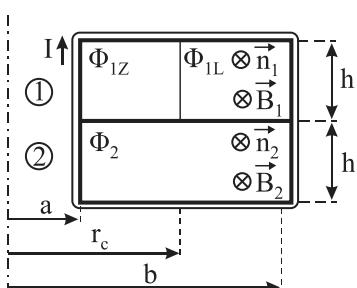
$$B_1 = \begin{cases} B_{c1} = 1 \text{ T}, & a < r < r_c \\ \mu_1 H_1 = \frac{1}{1000} \cdot \frac{NI}{2\pi r}, & r_c < r < b \end{cases}$$

$$B_1(a) = 1 \text{ T}$$

$$B_1(b) = 0,75 \text{ T}$$



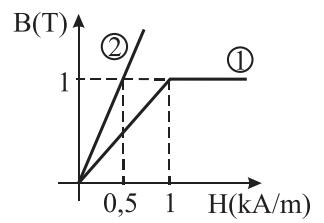
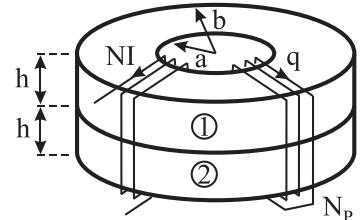
b)



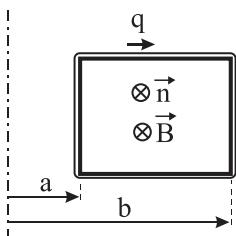
$$\Phi_J = \Phi_1 + \Phi_2 = B_{c1} \cdot (r_c - a) \cdot h + \int_a^{r_c} \mu_1 \cdot \frac{NI}{2\pi r} \cdot dr \cdot h + \int_{r_c}^b \mu_2 \cdot \frac{NI}{2\pi r} \cdot dr \cdot h$$

$$\Phi_J = B_{c1} \cdot (r_c - a) \cdot h + \frac{1}{1000} \cdot \frac{NI}{2\pi} \cdot h \cdot \ln \frac{b}{r_c} + \frac{1}{500} \cdot \frac{NI}{2\pi} \cdot h \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\Phi_J = 9 \text{ mWb}$$



c)



$$q = -\frac{N_p}{R} \cdot (\Phi_{KR} - \Phi_{POC}) = -\frac{N_p}{R} \cdot (0,1 \cdot \Phi_J - \Phi_J) = -\frac{N_p}{R} \cdot (-0,9 \cdot \Phi_J)$$

$$q = \frac{N_p}{R} \cdot 0,9 \cdot \Phi_J = \frac{4}{20} \cdot 0,9 \cdot 9 \cdot 10^{-3}$$

$$q = 1,62 mC$$

Zadatak 4. Na slici je prikazano torusno jezgro koje se sastoji iz dva dela načinjena od različitih materijala. Magnetske karakteristike ovih materijala date su na slici. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotano $N=314$ zavojaka u kojima se uspostavlja struja jačine $I=2$ A. Pre uključenja struje I, jezgro je bilo nenamagnetisano. Oko torusa je postavljen probni namotaj sa $N_p=4$ zavojka. Krajevi probnog namotaja su kratko spojeni. Ukupna otpornost probnog namotaja je $R=9 \Omega$. Dimenzije jezgra su: $a=6$ cm, $b=8$ cm, $c=12$ cm i $h=12$ cm.

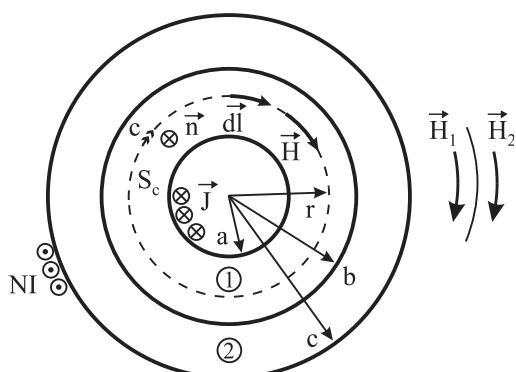
a) Odrediti kako se u funkciji rastojanja tačke od ose torusa menja intenzitet indukcije, $B(r)$, i prikažite tu funkciju grafički.

b) Izračunati fluks kroz presek jezgra, Φ_J .

c) Odrediti brojnu vrednost nanelektrisanja kao i smer u kome će ono proteći kroz probni namotaj nakon isključenja struje I. Smatrali da, nakon isključenja struje, zaostali fluks kroz jezgro ima vrednost $\Phi_r=5\% \Phi_J$.

Rešenje:

a)



Granični uslov:

$$H_{1t} = H_{2t} = H$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \Leftrightarrow (\vec{H}, d\vec{l}) = 0 \quad \Leftrightarrow (\vec{J}, \vec{n}) = 0$$

$$H \cdot 2\pi r = NI$$

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r} \quad a < r < c$$

Sa krive magnetisanja se vidi da je deo torusa, načinjen od materijala 2, stalno u linearnom režimu.

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{1}{500} \cdot \frac{NI}{2\pi r}, \quad b < r < c$$

$$B_2(b) = 2,5 T$$

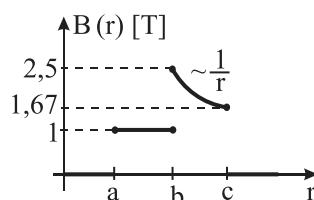
$$B_2(c) = 1,67 T$$

Za deo torusa načinjen od materijala 1 treba da se ispita režim rada:

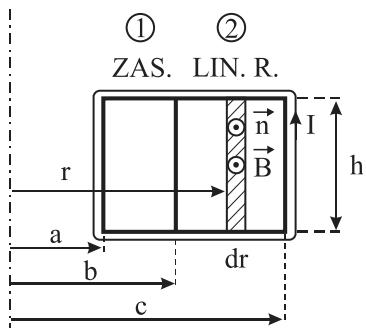
$$\left. \begin{aligned} H_{1\max}(a) &= \frac{NI}{2\pi a} = 1666 \text{ A/m} > H_{cl} \\ H_{1\min}(b) &= \frac{NI}{2\pi b} = 1250 \text{ A/m} > H_{cl} \end{aligned} \right\}$$

Materijal 1 je u potpunom zasićenju.

$$B_1 = B_{cl} = 1 T, \quad a < r < b$$



b)

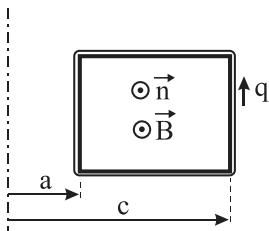


$$\Phi_J = \Phi_1 + \Phi_2 = B_{c1} \cdot (b-a) \cdot h + \int_b^c \mu_2 \cdot \frac{NI}{2\pi r} \cdot dr \cdot h$$

$$\Phi_J = B_{c1} \cdot (b-a) \cdot h + \frac{1}{500} \cdot \frac{NI}{2\pi} \cdot h \cdot \ln \frac{c}{b}$$

$$\boxed{\Phi_J = 12,13 \text{ mWb}}$$

c)



$$q = -\frac{N_p}{R} \cdot (\Phi_{KR} - \Phi_{POC}) = -\frac{N_p}{R} \cdot (0,05 \cdot \Phi_J - \Phi_J) = -\frac{N_p}{R} \cdot (-0,95 \cdot \Phi_J)$$

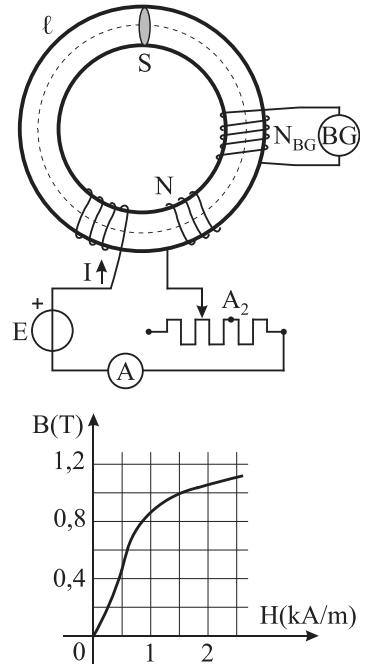
$$q = \frac{N_p}{R} \cdot 0,95 \cdot \Phi_J = \frac{4}{9} \cdot 0,95 \cdot 12,13 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{q = 5,2 \text{ mC}},$$

Po Lencovom zakonu, pri isključenju struje, kroz probni namotaj nanelektrisanje q protekne u smeru struje I.

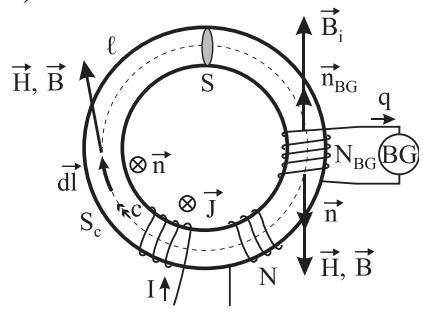
Zadatak 5. Na slici je prikazano tanko torusno jezgro, načinjeno od materijala čija je magnetska karakteristika data na slici. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotan pobudni namotaj sa $N=100$ zavojaka. Pobudni namotaj je priključen na generator vremenski konstantne ems i otpornik promenljive otpornosti, tako da jačina struje I može da se menja. Dimenzije jezgra su $\ell=30 \text{ cm}$ i $S=1 \text{ cm}^2$. Oko torusa je postavljen probni namotaj balističkog galvanometra sa $N_{BG}=10$ zavojaka. Ukupna otpornost probnog namotaja je $R_{BG}=16 \Omega$. Pre uključenja struje I , jezgro je bilo nenamagnetišano. U početnom trenutku jačina struje u pobudnom namotaju je $I=2,4 \text{ A}$. Zatim se, pomeranjem kliznog kontakta u tačku A_2 , poveća jačina struje I . U procesu promene jačine struje pobudnog namotaja, kroz balistički galvanometar protekne nanelektrisanje $q=15 \mu\text{C}$.

- Odrediti smer u kome će proteći nanelektrisanje q .
- Izračunati novu vrednost jačine struje, I .



Rešenje:

a)



Pošto jačina struje raste, fluks kroz N_{BG} raste u smeru normale \vec{n} koja ima smer kao \vec{B} .

Prema Lencovom zakonu u namotaju N_{BG} se indukuje struja, čije magnetsko polje \vec{B}_i ima suprotan smer od magnetskog polja pobudnog namotaja. Prema tome indukovana struja, odnosno q , ima smer kao na slici. Ovim smerom je određena normala \vec{n}_{BG} .

$$\Phi = \int_{S_{pp}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B \cdot S$$

b)

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \Leftrightarrow \quad \oint(\vec{H}, d\vec{l}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint(\vec{J}, \vec{n}) = 0$$

$$H \cdot l = NI$$

$$q = -\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot (\Phi_{KR} - \Phi_{POČ}) = +\frac{N_{BG}}{R_{BG}} \cdot (B_K - B_P) \cdot S$$

$$I_P = 2,4 \text{ A}$$

$$H_P = \frac{NI_P}{l} = 800 \text{ A/m} \quad \xrightarrow{\text{sa krive}} \quad B_P \approx 0,8 \text{ T}$$

$$B_K = \frac{q \cdot R_{BG}}{N_{BG} \cdot S} + B_P \approx 1,04 \text{ T} \quad \xrightarrow{\text{sa krive}} \quad H_K \approx 1500 \text{ A/m}$$

$$I_K = \frac{H_K \cdot l}{N} \quad \boxed{I_K = 4,5 \text{ A}}$$

