

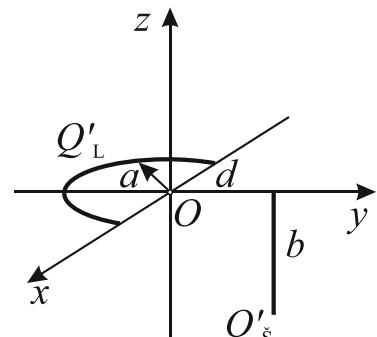
ZADACI

Zadatak 1. Tanak štap od izolacionog materijala savijen je u polukrug poluprečnika a , i postavljen je u x - y ravan Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, kao što je prikazano na slici 1. Na rastojanju d od koordinatnog početka, paralelno sa z osom, nalazi se pravolinijski štap, takođe od izolacionog materijala, nepoznate dužine b . Početak štapa se nalazi na pozitivnom delu y ose. Obe strukture su ravnomerno nanelektrisane podužnim gustinama nanelektrisanja, Q'_L i Q'_S , respektivno.

- Izvesti, u opštim brojevima, izraz za vektor jačine električnog polja u tački O , koji potiče od nanelektrisanog poluprstena poluprečnika a .
- Izvesti, u opštim brojevima, izraz za vektor jačine električnog polja u tački O , koji potiče od nanelektrisanog štapa.
- Odrediti dužinu štapa, b , tako, da rezultantni vektor jačine električnog polja u tački O nema y komponentu.

Brojni podaci su:

$$Q'_L = 3 \text{ nC/m}, Q'_S = 4Q'_L, a = 3 \text{ cm}, d = a, \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m.}$$

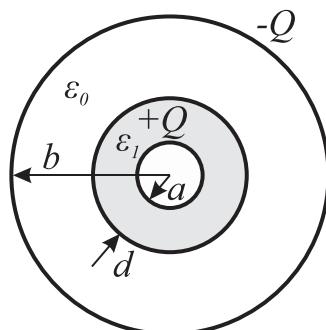


Slika 1.

Zadatak 2. Na slici 2 je prikazan poprečni presek vazdušnog koaksijalnog kabla, poluprečnika elektroda $a = 2 \text{ mm}$ i $b = 4 \text{ mm}$, dužine $L = 2 \text{ m}$. Unutrašnji provodnik je presvučen slojem teflona, debljine $d = 0,5 \text{ mm}$, permitivnosti $\epsilon_1 = 2 \epsilon_0$.

- Izvesti, u opštim brojevima, izraz za kapacitivnost kabla, C_{ek} .
- Izračunati brojnu vrednost kapacitivnosti kondenzatora.
- Na koji maksimalan napon sme da se priljuči posmatrani kondenzator, ako su električne čvrstine vazduha i teflona jednake: $E_{č0} = 30 \text{ kV/cm}$, $E_{č1} = 197 \text{ kV/cm}$.
- Izračunati količinu vezanog nanelektrisanja u teflonu, uz graničnu površinu sa vazduhom kada je kondenzator priključen na napon $U = 3 \text{ kV}$.
- Odrediti energiju sadržanu u koaksijalnom kablu pri naponu $U_1 = U_{\max}/2$.

Permitivnost vazduha iznosi: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m.}$

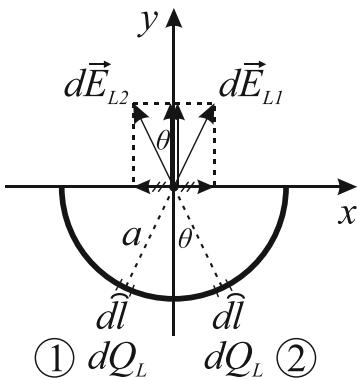


Slika 2.

PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je tačno uraditi više od 50% svakog od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje jedan sat i trideset minuta.

Z1

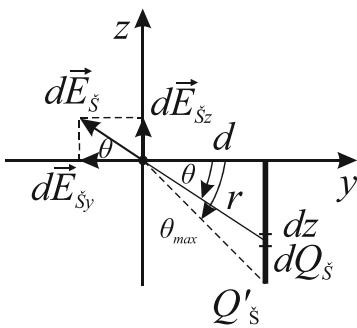


a) $d\vec{E}_{L1x} + d\vec{E}_{L2x} = 0 \rightarrow \vec{E}_{Lx} = 0$

$$dE_{L1y} = dE \cos \theta = \frac{dQ'_L}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta = \frac{Q'_L dl}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta = \frac{Q'_L \cancel{dl}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta$$

$$E_{Ly} = 2 \int_{po \ tuku} dE_{L1y} = 2 \frac{Q'_L}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{Q'_L}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right)$$

$$E_{Ly} = \frac{Q'_L}{2\pi\epsilon_0 a} \quad \boxed{\vec{E}_L = \frac{Q'_L}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{i}_y}$$



b) $dE_s = \frac{dQ'_s}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q'_s \cdot dz}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$dE_{sy} = dE_s \cos \theta \quad dE_{sz} = dE_s \sin \theta$$

$$E_{sy} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{po \ štalu} \frac{dz}{r^2} \cos \theta = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{po \ štalu} \frac{\cancel{dz}}{r^2} \cos \theta = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{po \ štalu} \frac{d}{\cancel{r^2}} \cos \theta$$

$$E_{sy} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} \int_0^{\theta_{max}} \cos \theta d\theta = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \theta_{max} - \sin 0)$$

$$\boxed{E_{sy} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}} (-\vec{i}_y)}$$

$$E_{sz} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{po \ štalu} \frac{dz}{r^2} \sin \theta = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{po \ štalu} \frac{\cancel{dz}}{r^2} \sin \theta = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{po \ štalu} \frac{\sin \theta d\theta}{r \cos \theta} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{po \ štalu} \frac{\sin \theta d\theta}{d \cancel{\cos \theta}} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} \int_0^{\theta_{max}} \sin \theta d\theta$$

$$E_{sz} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} (-\cos \theta_{max} + \cos 0) = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} \cdot \left(1 - \frac{d}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right)$$

$$\boxed{\vec{E}_{sz} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right) \vec{i}_z}$$

c)

$$\vec{E}_L + \vec{E}_{sy} = 0 \Rightarrow E_L = E_{sy}$$

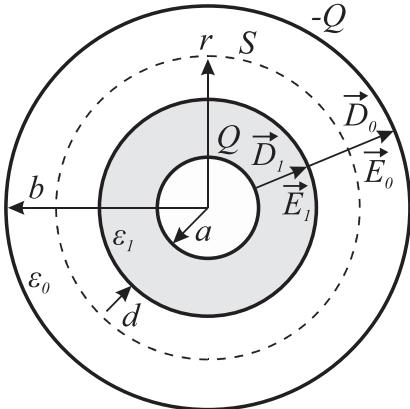
$$\frac{Q'_L}{2\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q'_s}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}}, \quad a = d$$

$$Q'_L = \frac{4Q'_s}{2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$2b = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$4b^2 = b^2 + a^2$$

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ cm}}$$



a)

Granični uslov:

$$D_{1n} = D_{0n} = D$$

$$E_1 \neq E_0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{us}$$

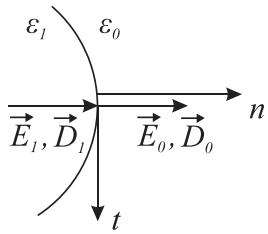
$$\int_{S_{OM}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$D \cdot 2\pi L = Q$$

$$D = \frac{Q}{2r\pi L}$$

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{2r\pi L \epsilon_1}, \quad a < r < a + d$$

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2r\pi L \epsilon_0}, \quad a + d < r < b$$



$$U = \int_{a}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \int_a^{a+d} \frac{Q}{2r\pi L \epsilon_1} dr + \int_{a+d}^b \frac{Q}{2r\pi L \epsilon_0} dr$$

$$U = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_1} \cdot \ln \frac{a+d}{a} + \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \cdot \ln \frac{b}{a+d}$$

$$U = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{a+d}{a} + \ln \frac{b}{a+d} \right]$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{a+d}{a} + \ln \frac{b}{a+d}}$$

b)

$$C = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\frac{1}{2} \ln \frac{2,5}{2} + \ln \frac{4}{2,5}} = 191,13 \text{ pF}$$

c)

$$E_{1\max} = \frac{Q_{1\max}}{2a\pi L \epsilon_1} \leq E_{C1} \rightarrow Q_{1\max} \leq 2a\pi L \epsilon_1 E_{C1} = 8,76 \mu\text{C}$$

$$E_{0\max} = \frac{Q_{0\max}}{2(a+d)\pi L \epsilon_0} \leq E_{C0} \rightarrow Q_{0\max} \leq 2(a+d)\pi L \epsilon_0 E_{C0} = 0,83 \mu\text{C}$$

$$Q_{\max} = \min \{Q_{1\max}, Q_{0\max}\} = Q_{0\max} = 0,83 \mu\text{C}$$

$$U_{\max} = \frac{Q_{\max}}{C} = \frac{0,83 \cdot 10^{-6}}{191,13 \cdot 10^{-12}} = 4342,59 \text{ V}$$

$$|U_{\max}| = 4,3 \text{ kV}$$

e)

$$W_e = \frac{1}{2} C U_1^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{2} U_{\max} \right)^2$$

$$W_e = \frac{1}{8} C U_{\max}^2$$

$$W_e = \frac{1}{8} \cdot 191,13 \cdot 10^{-12} \cdot (4,3 \cdot 10^3)^2$$

$$W_e = 441,75 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$|W_e| = 0,44 \text{ mJ}$$

d)

$$P_1 = D - \epsilon_0 E_1 = D - \epsilon_0 \frac{D}{\epsilon_1} = D \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right) = D \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right)$$

$$P_1 = \frac{Q}{2r\pi L} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right)$$

$$\sigma_{v1}(r=a+d) = \vec{n}_1 \cdot \vec{P}_1(r=a+d) = +P_1(r=a+d)$$

$$\sigma_{v1}(r=a+d) = +\frac{Q}{2(a+d)\pi L} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right)$$

$$Q_{v1}(r=a+d) = \sigma_{v1}(r=a+d) \cdot 2(a+d)\pi L$$

$$Q_{v1}(r=a+d) = \frac{Q}{2(a+d)\pi L} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) \cdot 2(a+d)\pi L$$

$$Q_{v1}(r=a+d) = Q \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) = Q \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} C U$$

$$|Q_{v1}(r=a+d)| = 286,7 \text{ nC}$$

