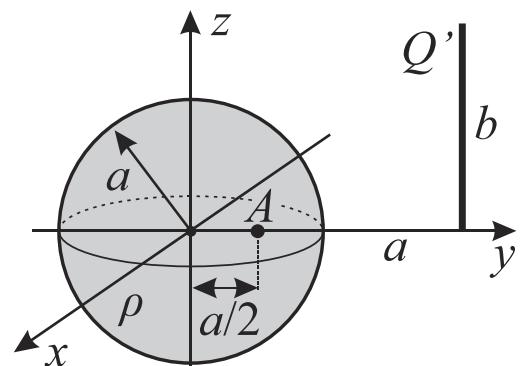


ZADACI

Zadatak 1. Zapreminsko naelektrisanje gustine $\rho = \rho_0$, raspoređeno je unutar zamišljene sfere, poluprečnika a , čiji je centar u koordinatnom početku zadatog Dekartovog koordinatnog sistema, kao što je prikazano na slici 1. Tanak štap, dužine b , naelektrisan ravnomerno podužnom gustinom naelektrisanja Q' , postavljen je u y - z ravni, paralelno sa z osom, na rastojanju $2a$ od centra sistema.

- Izvesti, u opštim brojevima, izraz za vektor jačine električnog polja, koji u tački A , koja se nalazi na y osi, na rastojanju $a/2$ od centra sistema, stvara zapremski raspoređeno naelektrisanje.
- Izvesti, u opštim brojevima, izraz za vektor jačine električnog polja, koji u tački A stvara štap.
- Izračunati podužno naelektrisanje štapa, Q' , tako da rezultantni vektor jačine električnog polja u tački A ima samo z komponentu.

Brojni podaci su: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3a/2$, $\rho_0 = 2 \mu\text{C}/\text{m}^3$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

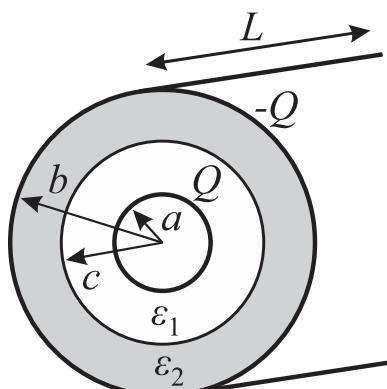


Slika 1.

Zadatak 2. Na slici 2 je prikazan koaksijalni kabl dužine $L = 32 \text{ cm}$, ispunjen sa dva sloja dielektrika relativnih permitivnosti $\epsilon_1 = 6,4$ i $\epsilon_2 = 2,1$. Poluprečnici elektroda kabla su $a = 2 \text{ mm}$ i $b = 4,2 \text{ mm}$. Poluprečnik razdvojne površi dva dielektrika je $c = 3,3 \text{ mm}$. Elektrode kondenzatora su nanelektrisane nanelektrisanjem Q i $-Q$.

- Razmotriti granične uslove i odrediti kako se u zavisnosti od rastojanja od ose kabla, r , menjaju intenziteti vektora električnog pomeraja i vektora jačine električnog polja
- Izračunati kapacitivnost kabla.
- Odrediti najveći napon na koji sme da se priključi kabl.

Ostali brojni podaci: $E_{C1} = 43 \text{ kV/cm}$, $E_{C2} = 38 \text{ kV/cm}$.



Slika 2.

PRAVILA POLAGANJA

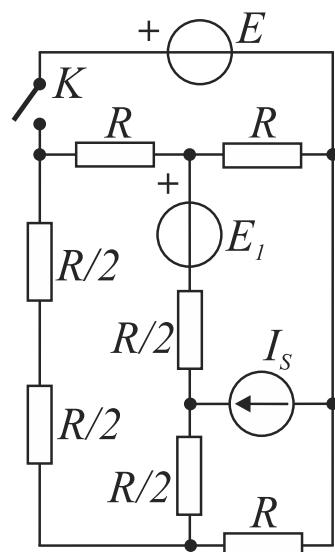
Za položen kolokvijum neophodno je sakupiti više od 50% poena na svakom od zadataka. Svaki zadatak se boduje sa 25 poena. Kolokvijum traje jedan sat i trideset minuta.

ZADACI

Zadatak 1. Zatvaranjem prekidača K u kolu sa slike 1 se uključuje idealni naponski generator elektromotorne sile E . Jačina struje kroz priključke ovog generatora ne sme da bude veća od $I_{\max} = 25 \text{ mA}$.

- Proveriti da li će, nakon zatvaranja prekidača, jačina struje kroz generator preći graničnu vrednost. Pri rešavanju zadatka primeniti Tevenenovu teoremu i metodu konturnih struja.
- Ukoliko hoće, dodati zaštitni otpornik i odrediti njegovu otpornost kao i graničnu vrednost dozvoljene snage zaštitnog otpornika.

Brojni podaci su: $E = 10 \text{ V}$, $E_1 = 12 \text{ V}$, $I_S = 100 \text{ mA}$, $R = 100 \Omega$.

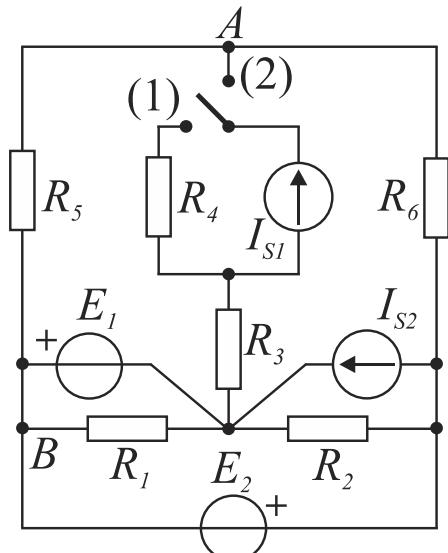


Slika 1.

Zadatak 2. Kada se u mreži sa slike 2, preklopnik prebaci iz položaja (1) u položaj (2), napon između tačaka A i B se poveća za 5 V .

- Primenjujući teoremu superpozicije, izračunati jačinu struje strujnog generatora, I_{S1} .
- Odrediti snage oba strujna generatora, kada je preklopnik u položaju (2). Kolo rešavati metodom potencijala čvorova.

Brojni podaci su: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 100 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_6 = 15 \Omega$, $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $I_{S2} = 0,5 \text{ A}$.



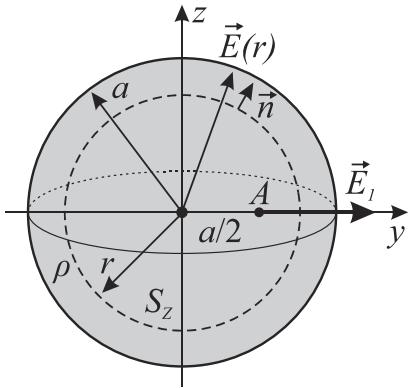
Slika 2.

PRAVILA POLAGANJA

Za položen kolokvijum neophodno je sakupiti više od 50% poena na svakom od zadataka. Svaki zadatak se bodoje sa 25 poena. Kolokvijum traje jedan sat i trideset minuta.

I-1

a)



$$\oint_{S_z} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{u_{S_z}}}{\epsilon_0} \quad \nabla(\vec{E}, \vec{n}) = 0$$

$$\oint_{S_z} E(r) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_0 dV$$

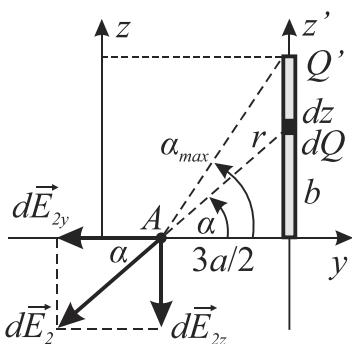
$$E(r) 4r^2 \pi = \frac{\rho_0 V}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}, \quad r < a$$

$$E_1 \left(r = \frac{a}{2} \right) = \frac{\rho_0 \frac{a}{2}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0} \cdot \vec{i}_y}$$

b)



$$dE_2 = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$dE_{2y} = dE_2 \cos \alpha = \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Q' \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{3a/2}{\cos \alpha} d\alpha$$

$$E_{2y} = \int_{\substack{po \\ \text{štalu}}} dE_{2y} = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\alpha_{\max}} \cos \alpha d\alpha = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} (\sin \alpha_{\max} - \sin 0)$$

$$E_{2y} = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \frac{b}{\sqrt{b^2 + (3a/2)^2}}$$

$$\boxed{\vec{E}_{2y} = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i}_y)}$$

$$dE_{2z} = dE_2 \sin \alpha = \frac{Q' dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = \frac{Q' \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = \frac{Q' \frac{d\alpha}{\cos \alpha}}{4\pi\epsilon_0 \frac{3a/2}{\cos \alpha}} \sin \alpha = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \sin \alpha d\alpha$$

$$E_{2z} = \int_{\substack{po \\ \text{štalu}}} dE_{2z} = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\alpha_{\max}} \sin \alpha d\alpha = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} (\cos 0 - \cos \alpha_{\max}) = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{3a/2}{\sqrt{b^2 + (3a/2)^2}} \right) = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\boxed{\vec{E}_{2z} = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-\vec{i}_z)}$$

c)

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0} - \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \vec{i}_y + \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-\vec{i}_z)$$

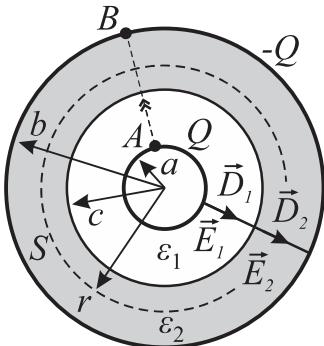
$$\vec{E}_{Ay} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0} = \frac{Q'}{6\pi\epsilon_0 a} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Q' = \rho_0 a \frac{2\pi a}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{Q' = 22,2 \text{ nC/m}}$$

I-2

a)



Granični uslov:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad D_1 = D_2 = D$$

$$E_{t1} \neq E_{t2}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{slobodno u S}$$

$$\int_{S_{OM}} D \, ds = Q$$

$$D \cdot 2\pi r L = Q$$

$$D = \frac{Q}{2\pi r L}, \quad a \leq r \leq b$$

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 r L}, \quad a \leq r \leq c$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r L}, \quad c \leq r \leq b$$

b)

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \, dr = \int_a^c E_1 \, dr + \int_c^b E_2 \, dr = \int_a^c \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 r L} \, dr + \int_c^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r L} \, dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 L} \ln \frac{c}{a} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 L} \ln \frac{b}{c}$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{b}{c}}$$

$$C = 92,1 \text{ pF}$$

c)

$$E_{1\max} = \frac{Q_{1\max}}{2\pi\epsilon_1 a L} \leq E_{C1} \quad \Rightarrow \quad Q_{1\max} = E_{C1} 2\pi\epsilon_1 a L = 0,98 \mu C$$

$$E_{2\max} = \frac{Q_{2\max}}{2\pi\epsilon_2 c L} \leq E_{C2} \quad \Rightarrow \quad Q_{2\max} = E_{C2} 2\pi\epsilon_2 c L = 0,47 \mu C$$

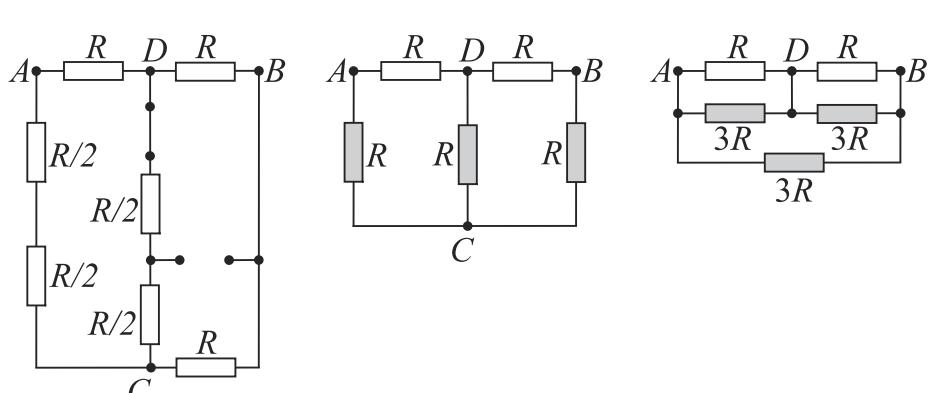
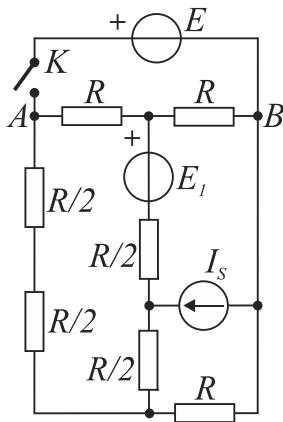
$$Q_{\max} = \min \{Q_{1\max}, Q_{2\max}\} = Q_{2\max} = 0,47 \mu C$$

$$U_{\max} = \frac{Q_{\max}}{C} = \frac{0,47 \mu C}{92,1 \text{ pF}}$$

$$U_{\max} = 5,1 \text{ kV}$$

II-1

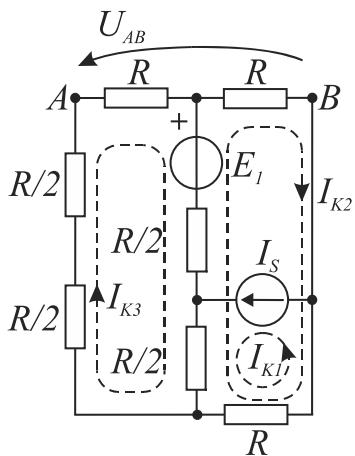
a)



$$R_T = R_{AB} = [(R \parallel 3R) + (R \parallel 3R)] \parallel 3R = [(100 \parallel 300) + (100 \parallel 300)] \parallel 300$$

$$R_T = (75 + 75) \parallel 300 = 150 \parallel 300$$

$$R_T = 100 \Omega$$



$$I_{K1} = I_s = 100 \text{ mA}$$

$$I_{K2} \left(R + R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \right) - I_{K1} \left(R + \frac{R}{2} \right) - I_{K3} \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} \right) = E_1$$

$$I_{K3} \left(R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \right) + I_{K1} \frac{R}{2} - I_{K2} \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} \right) = -E_1$$

$$300I_{K2} - 100I_{K3} = 27$$

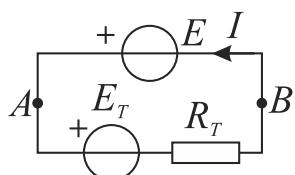
$$-100I_{K2} + 300I_{K3} = -17$$

$$I_{K2} = 80 \text{ mA}$$

$$I_{K3} = -30 \text{ mA}$$

$$E_T = U_{AB} = RI_{K3} + RI_{K2} = 100 \cdot (-30 \text{ m}) + 100 \cdot 80 \text{ m}$$

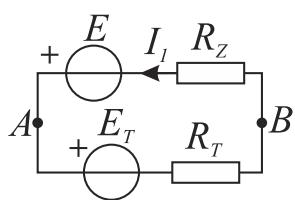
$$E_T = 5 \text{ V}$$



$$I = \frac{E - E_T}{R_T} = \frac{10 - 5}{100} = 50 \text{ mA} > I_{\max} = 25 \text{ mA}$$

Treba dodati redno vezan R_Z .

b)



$$I_1 = \frac{E - E_T}{R_T + R_Z} \leq I_{\max}$$

$$R_Z \geq \frac{E - E_T}{I_{\max}} - R_T = \frac{10 - 5}{25 \text{ m}} - 100$$

$$R_Z \geq 100 \Omega$$

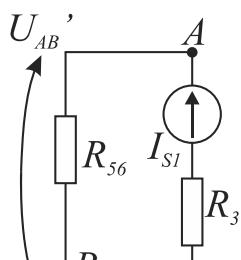
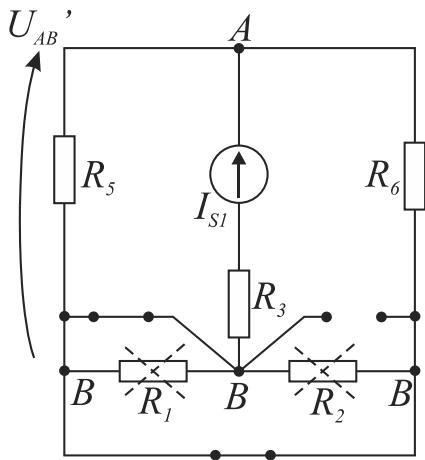
$$P_{Z\min} = R_Z I_{\max}^2 = 100 \cdot (25 \text{ m})^2$$

$$P_{Z\min} = 62,5 \text{ mW}$$

II-2

a)

$$U_{AB}^{(2)} = U_{AB}^{(1)} + U_{AB}' \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{AB} = U_{AB}^{(2)} - U_{AB}^{(1)} = U_{AB}' = 5V$$



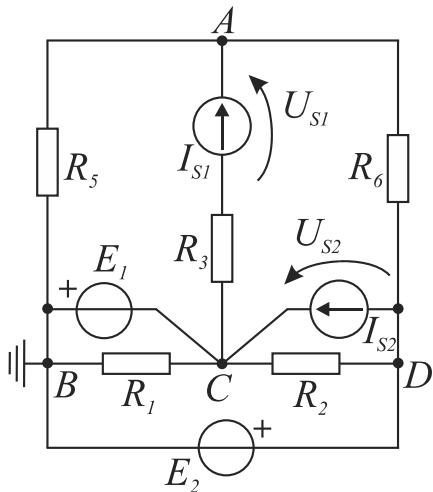
$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{5 \cdot 15}{5 + 15} = 3,75 \Omega$$

$$U_{AB} = I_{S1} R_{56}$$

$$I_{S1} = \frac{U_{AB}}{R_{56}} = \frac{5}{3,75}$$

$$I_{S1} = 1,33 \text{ A}$$

b)



$$\begin{array}{l}
 V_B = 0 \text{ V} \\
 V_C = -E_1 = -5 \text{ V} \\
 V_D = E_2 = 20 \text{ V} \\
 \\
 \hline
 V_A \left(\frac{1}{R_3 + \infty} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - V_C \left(\frac{1}{R_3 + \infty} \right) - V_D \left(\frac{1}{R_6} \right) = I_{S1} \\
 \\
 \hline
 V_A \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{15} \right) - 20 \cdot \left(\frac{1}{15} \right) = 1,33 \quad / \cdot 15 \\
 \\
 \hline
 4V_A = 40 \\
 \\
 \hline
 V_A = 10 \text{ V}
 \end{array}$$

$$U_{S1} = U_{AC} + R_3 I_{S1} = V_A - V_C + R_3 I_{S1} = 10 - (-5) + 10 \cdot 1,33 = 28,33 \text{ V}$$

$$P_{S1} = U_{S1} I_{S1} = 28,33 \cdot 1,33$$

$$P_{S1} = 37,78\,W$$

$$U_{S2} = U_{CB} = V_C - V_B = -5 - 20 = -25 \text{ V}$$

$$P_{S2} = U_{S2} I_{S2} = -25 \cdot 0,5$$

$$P_{S2} = -12,5\text{W}$$